

GIV I

Übungsmitschrift

Christiane Küch
Marc Spohr

Sommersemester 2005

Inhaltsverzeichnis

Komplexe Wechselspannungs- und Netzwerkanalyse	
Aufgabe 2.1	1
Einschub (Bode-Diagramm)	3
Aufgabe 2.2	6
Aufgabe 2.3	8
Lineare Systeme und die Fouriertransformation	
Aufgabe 3.1	11
Aufgabe 3.2	14
Aufgabe 3.3	16
Aufgabe 3.4	17
Aufgabe 3.5	22
Lineare Systeme und die Laplacetransformation	
Einschub (Laplace-Transformation)	25
Aufgabe 4.1	27
Aufgabe 4.2	30
Operationsverstärker und ihre Eigenschaften	
Aufgabe 5.1	33
Aufgabe 5.2	35
Schaltungen mit Operationsverstärkern	
Aufgabe 6.1	37
Aufgabe 6.2	37
GIV I Kurzfragen	
Kurzaufgabe 25	40
Kurzaufgabe 26	40
Kurzaufgabe 27	40
Kurzaufgabe 28	41
Kurzaufgabe 29	41
Kurzaufgabe 30	41
Kurzaufgabe 31	41
Kurzaufgabe 32	42
Kurzaufgabe 33	42
Kurzaufgabe 34	43

Aufgabe 2.1:

$$a) \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{\frac{R}{j\omega L} + 1} = \frac{1}{1 - \frac{j}{\Omega}} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \underline{H}(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{j}{\Omega}} = \frac{j\Omega}{j\Omega + 1}$$

Betrag:

$$|\underline{H}(j\Omega)| = \sqrt{\frac{\Omega^2 + 0^2}{\Omega^2 + 1^2}} = 20 \log \sqrt{\frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2}} [dB] = 10(\log(\Omega^2) - \log(1 + \Omega^2)) [dB]$$

 $\Omega \gg 1 :$

$$\log(\Omega^2) \approx \log(1 + \Omega^2) \Rightarrow |H| \approx 0 [dB]$$

 $\Rightarrow$ Hohe Frequenzen werden nicht abgeschwächt. $\Omega \ll 1 :$

$$|H| \approx 10(\log(\Omega^2) - \underbrace{\log(1)}_0) = 20 \log(\Omega)$$

 $\Rightarrow$ Gerade im Bode-Diagramm mit $20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$ Anstieg; es handelt sich um einen Hochpass-Filter.**Phasengang:**

$$\Theta(j\Omega) = \arg\left(\frac{1}{1 - \frac{j}{\Omega}}\right) = \arg(1) - \arg\left(1 - \frac{j}{\Omega}\right) = 0 - \arctan\left(\frac{-\frac{1}{\Omega}}{1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\Omega}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\Omega)$$

$$b) \underline{Z}_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega RC + 1}{j\omega C}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{R}{1 + j\omega RC}}{\frac{R}{1 + j\omega RC} + \frac{j\omega RC + 1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{R}{R + \frac{(j\omega RC + 1)^2}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{(j\omega RC + 1)^2}{j\omega RC}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + (1 + j\omega RC)^2}$$

$$= \frac{j\omega RC}{1 + 3j\omega RC - \omega^2 R^2 C^2} = \frac{1}{3 + j(\omega RC - \frac{1}{\omega RC})}$$

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{1}{RC}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega RC$$

$$\underline{H}(j\Omega) = \frac{1}{j(\Omega - \frac{1}{\Omega}) + 3} = \frac{j\Omega}{1 + 3j\Omega + (j\Omega)^2}$$

$$1 + 3j\Omega + (j\Omega)^2$$

$$\text{mit } a + b = 3, ab = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b}$$

$$= (1 + aj\Omega)(1 + bj\Omega)$$

$$a + \frac{1}{a} = 3 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$$

$$\underline{H}(j\Omega) = \left(1 + j\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\Omega\right) \left(1 + j\frac{2}{3 + \sqrt{5}}\Omega\right)$$

Ziel: Darstellung im Bode-Diagramm

Möglichkeit 1: $|H(j\Omega)| = \frac{|j\Omega|}{|1+j\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Omega| \cdot |1+j\frac{2}{3+\sqrt{5}}\Omega|}$

$$= 20 \log \left(\frac{|j\Omega|}{|1+j\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Omega| \cdot |1+j\frac{2}{3+\sqrt{5}}\Omega|} \right)$$

$$= 20 \log(|j\Omega|) + 20 \log \left(\frac{1}{|1+j\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Omega|} \right) + 20 \log \left(\frac{1}{|1+j\frac{2}{3+\sqrt{5}}\Omega|} \right)$$

$20 \log(|j\Omega|) \rightarrow$ Hochpass

$20 \log \left(\frac{1}{|1+j\frac{2}{3+\sqrt{5}}\Omega|} \right) \rightarrow$ Tiefpass, Knickfrequenz bei

$$\Omega' = \frac{1}{a}$$

Möglichkeit 2: $\underline{H}(j\Omega) = \frac{1}{j(\Omega - \frac{1}{\Omega}) + 3}$

$$|\underline{H}(j\Omega)| = 20 \log \left(\frac{1}{|j(\Omega - \frac{1}{\Omega}) + 3|} \right)$$

$$= 10 \log \left(\frac{1}{(\Omega - \frac{1}{\Omega})^2 + 9} \right)$$

$$= -10 \log \left(\left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right)^2 + 9 \right)$$

$\Omega \gg 1$:

$$|\underline{H}(j\Omega)|_{dB} \approx -10 \log(\Omega^2)$$

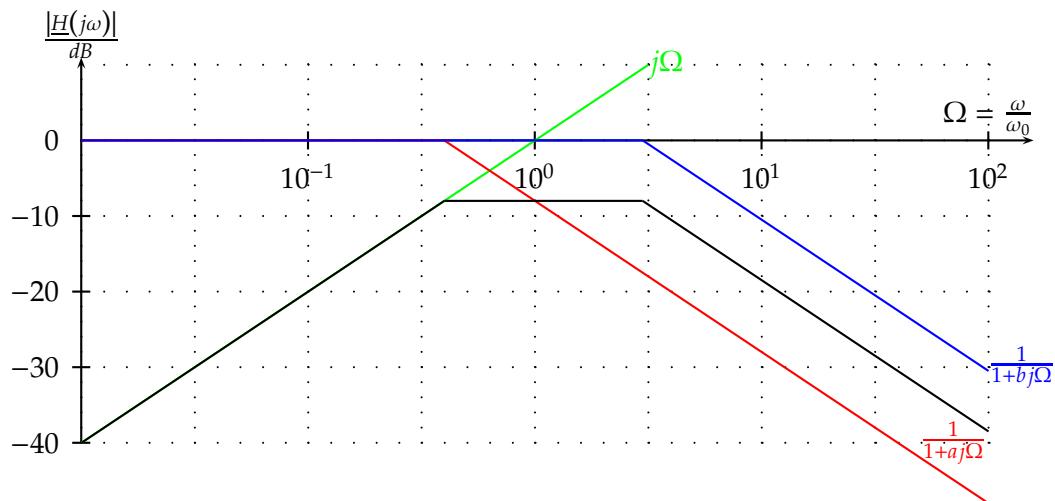
$\Omega \ll 1$:

$$|\underline{H}(j\Omega)|_{dB} \approx -10 \log \left(\left(\frac{1}{\Omega} \right)^2 \right)$$

$$= -20 \log \left(\frac{1}{\Omega} \right)$$

$\Omega = 1$:

$$|\underline{H}(j\Omega)|_{dB} = -10 \log(9) \text{ dB} \approx 9,5 \text{ dB}$$



Phasengang:

$$\Theta(j\Omega) = \arg \left(\frac{1}{j(\Omega - \frac{1}{\Omega}) + 3} \right)$$

$$= 0 - \arctan \left(\frac{\Omega - \frac{1}{\Omega}}{3} \right)$$

für $\Omega = 1 \Rightarrow \Theta = 0 - \arctan(0) = 0$

für $\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow \Theta = 0 - \arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

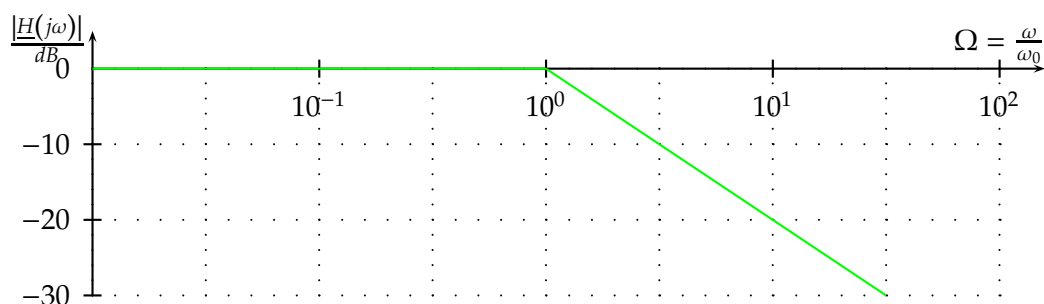
für $\Omega \rightarrow 0 \Rightarrow \Theta = 0 - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2}$

Einschub (Bode-Diagramm):

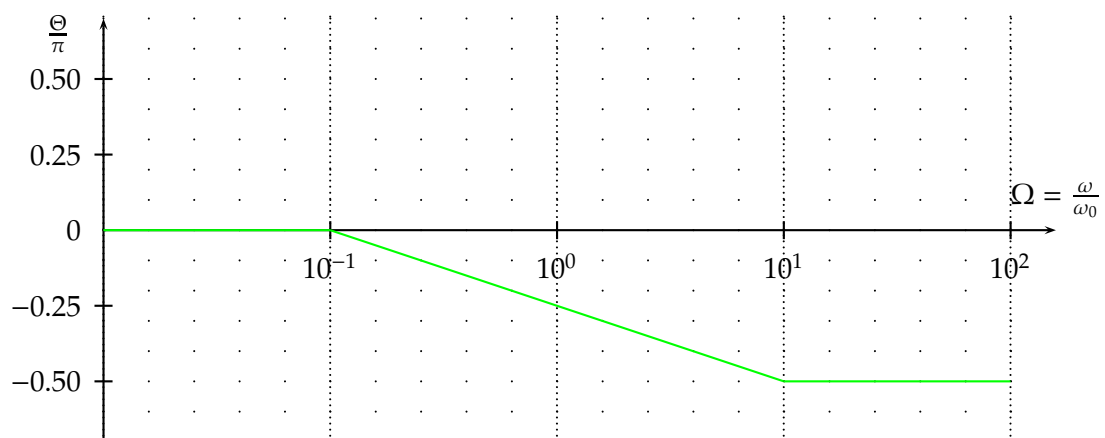
- dient zur Darstellung eines Frequenzganges durch approximierte Geradenstücke
- Zusammensetzung durch Addition von bekannten Funktionen erreichen (Multiplikation $\rightarrow$ Addition im BD)
- Tiefpass: TP

Form $H(j\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}$

BD Betrag:

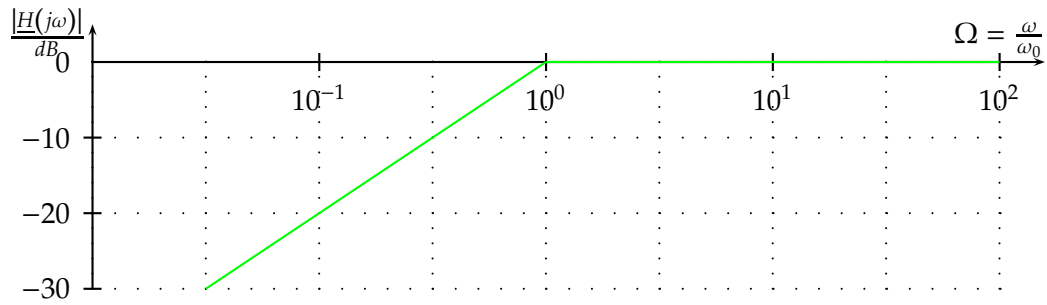


Phase:

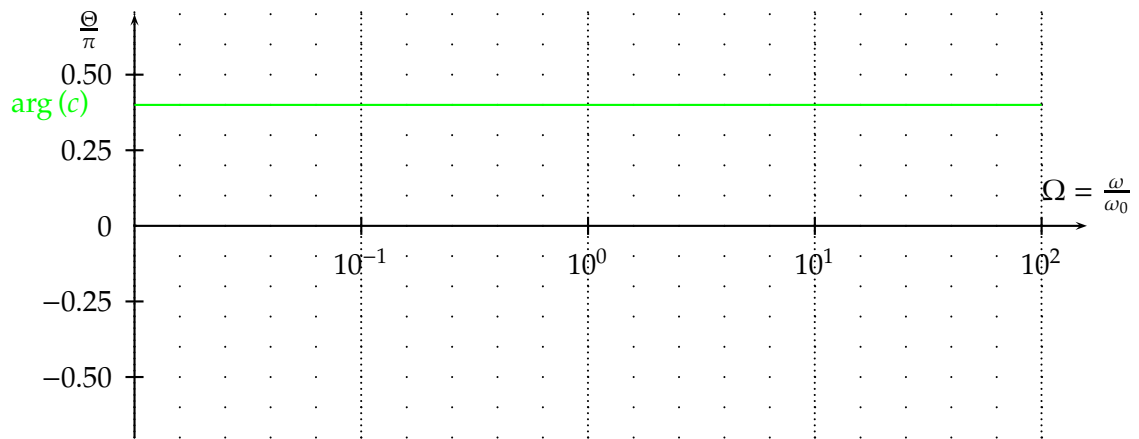


- Hochpass: HP

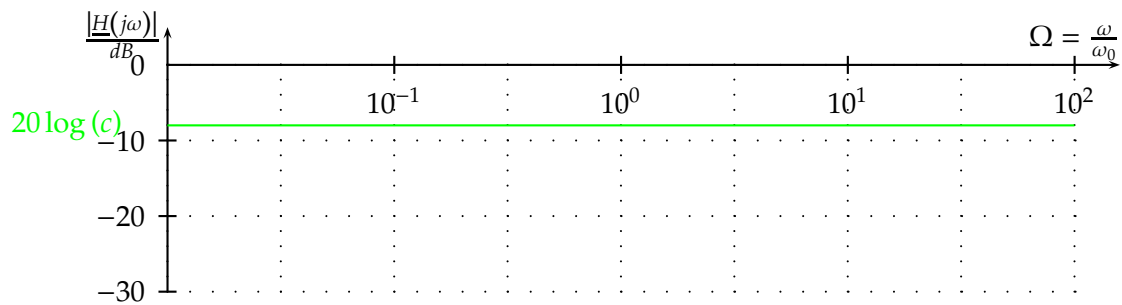
Form $H(j\Omega) = \frac{j\Omega}{1+j\Omega} = \frac{1}{1+\frac{1}{j\Omega}}$

BD Betrag:

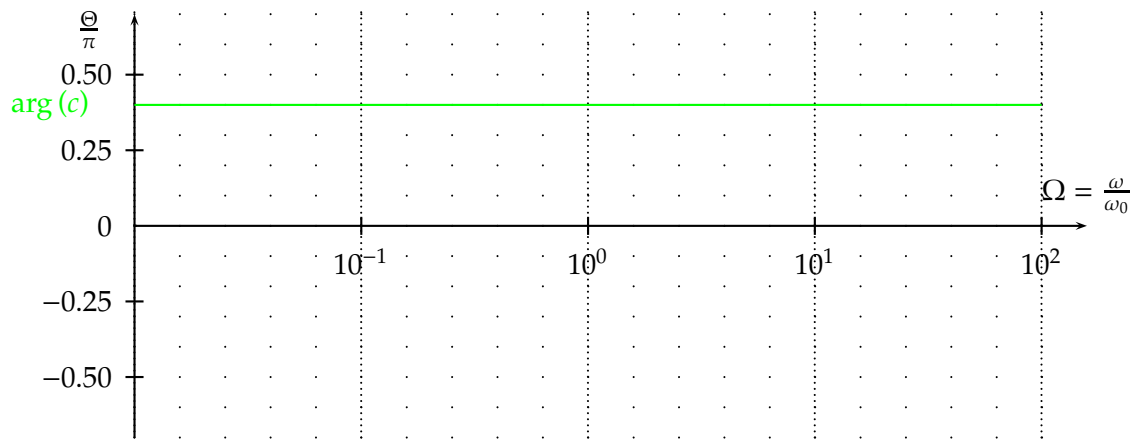
Phase:



- Konstante

Form $H(j\Omega) = C$ **BD Betrag:**

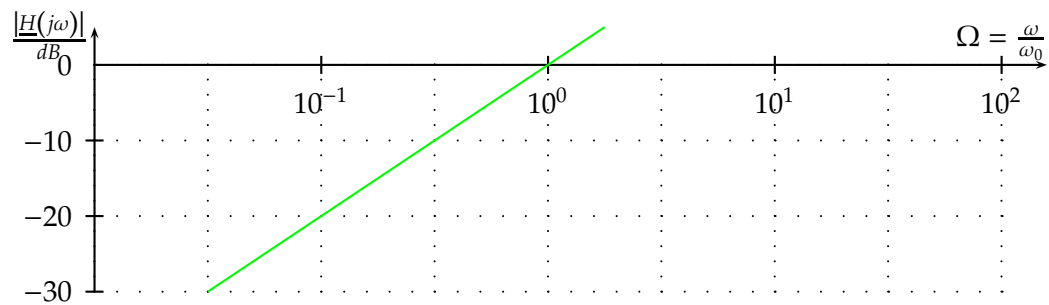
Phase:



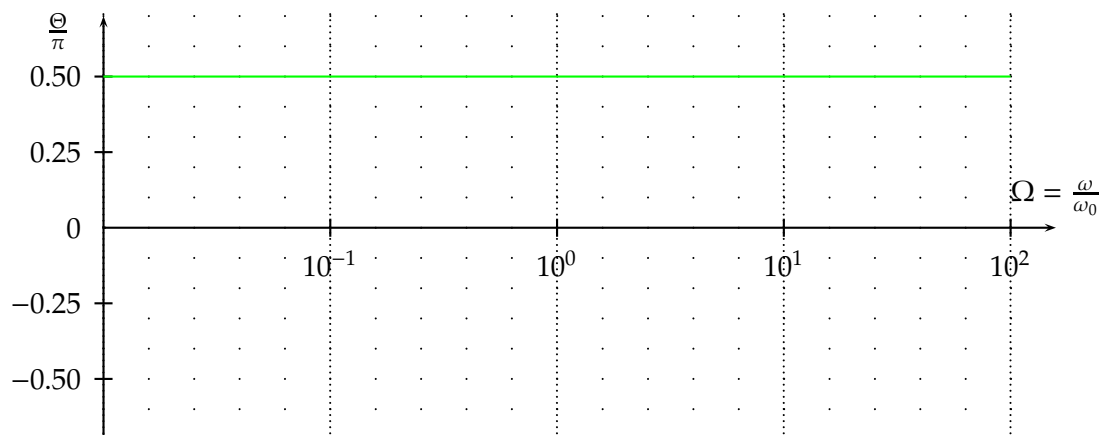
- Differenzierer

Form $H(j\Omega) = j\Omega$

BD Betrag:

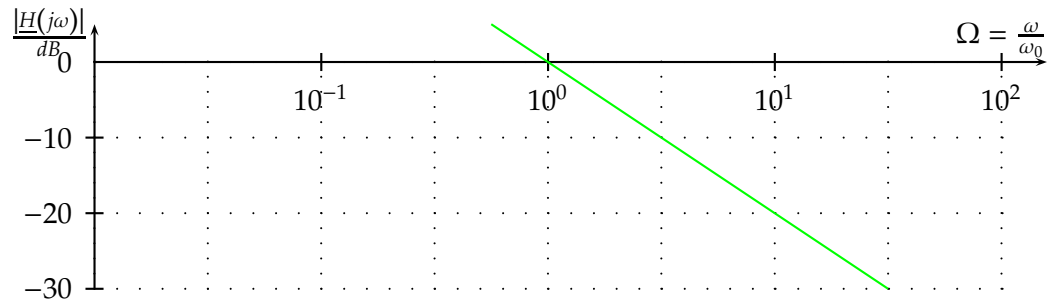
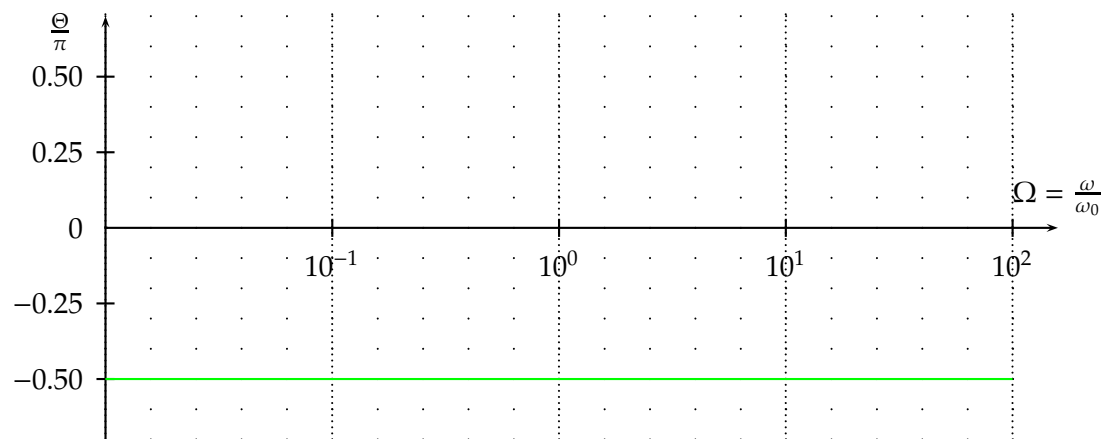


Phase:



- Integrierer

Form $H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega}$

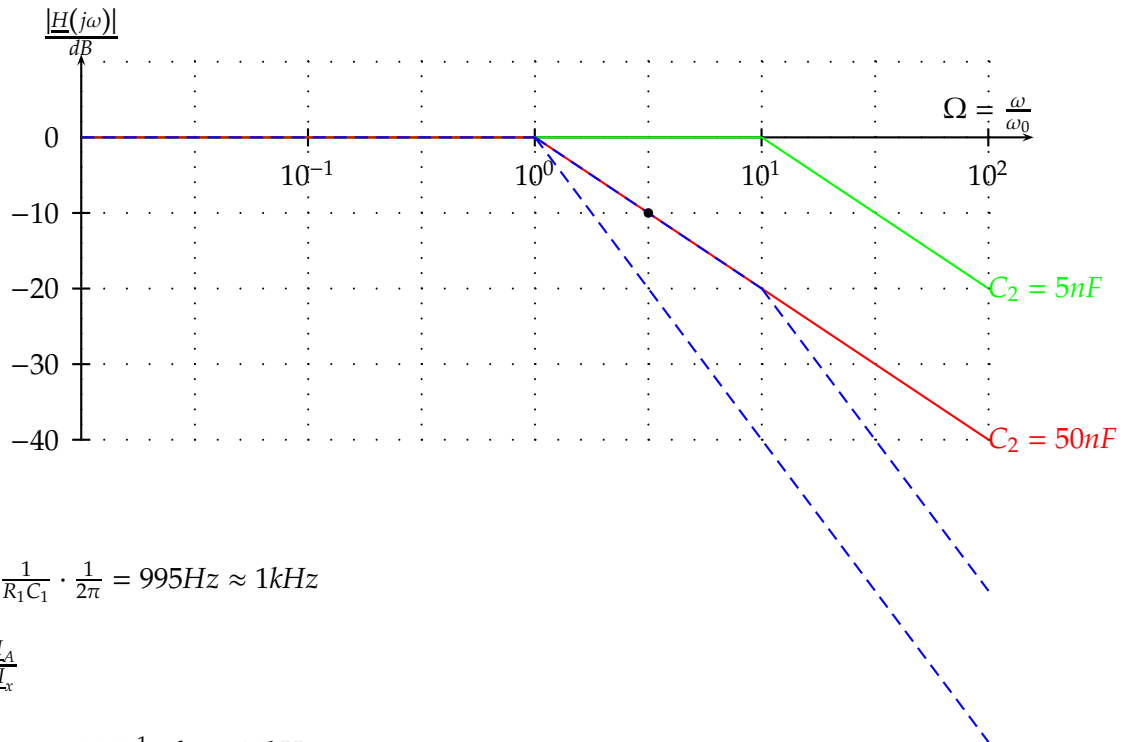
BD Betrag:**Phase:****Aufgabe 2.2:**

Der Sinn des idealen Verstärkers mit Verstärkungsfaktor 1 ist die Entkoppelung der beiden Schaltungskreise, so dass keine Rückwirkung stattfindet und die Ausgänge der Schaltungsteile nicht belastet sind.

$$\text{a) } \underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_x}{\underline{U}_e} = 1 + j\Omega$$

$$\omega_{01} = \frac{1}{R_1 C_1}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{01}}$$



b) $f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{1}{R_1 C_1} \cdot \frac{1}{2\pi} = 995 \text{ Hz} \approx 1 \text{ kHz}$

c) $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{U_A}{\underline{U}_x}$
 $\omega_{02} = \frac{1}{R_2 C_2}$
 $C_2 = 5 \text{ nF}: \omega_{02} = 62500 \frac{1}{\text{s}}, f_{02} \approx 10 \text{ kHz}$
 $C_2 = 50 \text{ nF}: \omega_{02} = 6250 \frac{1}{\text{s}}, f_{02} \approx 1 \text{ kHz}$
 $\Omega_{02} = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} = 1..10$

d) $\underline{H}_1 = \frac{\underline{U}_x}{\underline{U}_E}, \underline{H}_2 = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_x}$
 $\underline{H} = \frac{\underline{U}_x}{\underline{U}_E} \cdot \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_x} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E}$
 $\Rightarrow \underline{H} = \prod_{i=1}^N \underline{H}_i$

im Bode-Diagramm:

$$\begin{aligned} |\underline{H}|_{dB} &= 20 \log(\underline{H}) \text{ dB} \\ &= 20 \log\left(\prod_{i=1}^N \underline{H}_i\right) \text{ dB} \\ &= 20 \sum_{i=1}^N \left(\log(\underline{H}_i)\right) \text{ dB} \end{aligned}$$

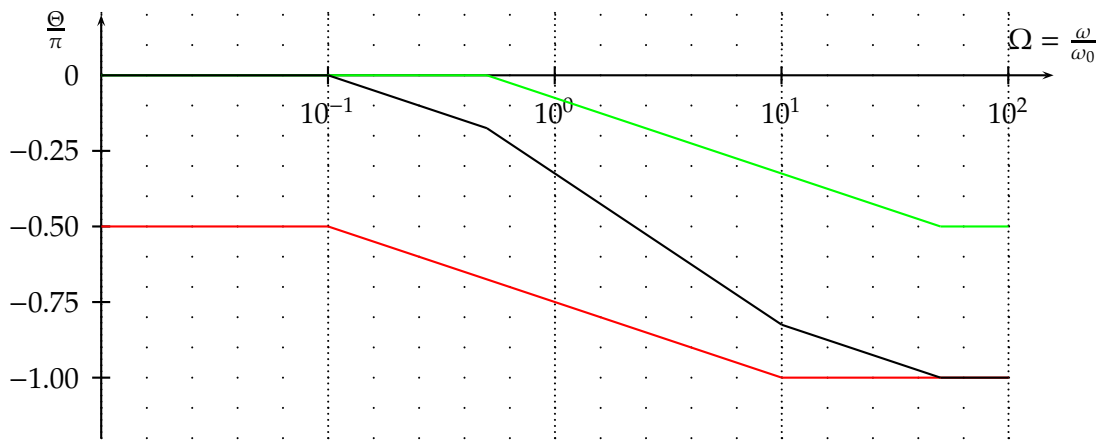
e) siehe Aufgabenteil a)

f) $f_x \stackrel{!}{=} 20 \text{ kHz}$
 $\Omega_x = \frac{\omega_x}{\omega_{01}} = \frac{f_x}{f_{01}} = \frac{20 \text{ kHz}}{1 \text{ kHz}} = 20$
 $\underline{H}(j\omega_1) = -40 \text{ dB}$

Aus Bode-Diagramm:

$$\begin{aligned} \Omega_{02} \stackrel{!}{=} 4 &\Leftrightarrow \omega_{02} = 4 \cdot \omega_{01} = \frac{1}{R_2 C_2} \\ \Leftrightarrow C_2 &= \frac{1}{R_2 \cdot 4 \cdot 6250 \text{ s}^{-1}} = 12,5 \text{ nF} \end{aligned}$$

g) Phasengang:

**Aufgabe 2.3:**a) $\underline{Z}_1 = R_1$

$$\underline{Z}_2 = R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_i} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_i}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_i}} = \frac{R_2}{1 + j\omega C_i R_2}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega C_i R_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega C_i R_2}}$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C_i R_1 R_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_i \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$\text{mit } \omega_0 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \frac{1}{C_i}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega}$$

$$|\underline{H}(j\Omega)|_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$$

$$= 20 \log\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) + 20 \log\left(\left|\frac{1}{1 + j\Omega}\right|\right)$$

$$\stackrel{0.1}{=} -20dB + 20 \log\left(\left|\frac{1}{1 + j\Omega}\right|\right)$$

$$\left|\frac{1}{1 + j\Omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}} \stackrel{\Omega=1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{=} -3dB$$

Die gesuchte normierte Frequenz ist $\Omega = 1$, $f = ?$

$$\Omega_x = \frac{\omega_x}{\omega_0} = \frac{f_x}{f_0} \Leftrightarrow f_x = f_0$$

$$f_x = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2} \frac{1}{C_i} \frac{1}{2\pi} = 8.84 \text{kHz} \approx 9 \text{kHz}$$

b) Neue Anordnung:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_1 \frac{1}{j\omega C_k}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_k}} = \frac{R_1}{1 + j\omega C_k R_1}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2}{1 + j\omega C_i R_2}$$

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ &= \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega C_i R_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega C_k R_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega C_i R_2}} \\ &= \frac{R_2}{R_2 + R_1 \cdot \underbrace{\frac{1 + j\omega C_i R_2}{1 + j\omega C_k R_1}}_{\text{einziger frequenzabh. Teil!}}} \end{aligned}$$

einziger frequenzabh. Teil!

$\underline{H}(j\omega)$ wird frequenzunabhängig, wenn

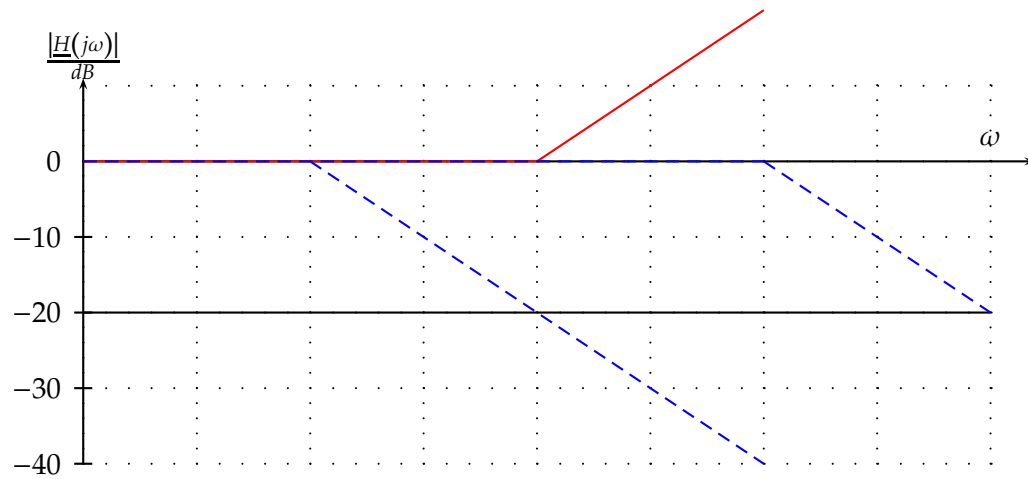
$$\frac{1 + j\omega C_i R_2}{1 + j\omega C_k R_1} = \text{const} \neq f(\omega)$$

$$\Rightarrow C_i R_2 = C_k R_1 \Leftrightarrow C_k = \frac{R_2}{R_1} C_i$$

$$\text{mit } \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 \text{M}\Omega}{9 \text{M}\Omega} = \frac{1}{9} \text{ und } C_i = 20 \text{pF} \Rightarrow C_k \approx 2.2 \text{pF}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \underline{H}(j\omega) &= \frac{R_2}{R_2 + R_1 \cdot \frac{1 + j\omega C_i R_2}{1 + j\omega C_k R_1}} \\ &= R_2 \frac{1 + j\omega R_1 C_k}{(1 + j\omega R_1 C_k) \left(R_2 + R_1 \frac{1 + j\omega R_2 C_i}{1 + j\omega R_1 C_k} \right)} \\ &= R_2 (1 + j\omega R_1 C_k) \frac{1}{(R_2 + j\omega R_1 R_2 C_k) + (R_1 + j\omega R_1 R_2 C_i)} \\ &= R_2 (1 + j\omega R_1 C_k) \frac{1}{(R_1 + R_2) + j\omega R_1 R_2 (C_k + C_i)} \\ &= \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}_{\text{const}} \underbrace{(1 + j\omega R_1 C_k)}_{\text{inverser TP}} \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_k + C_i)}}_{\text{TP}} \end{aligned}$$

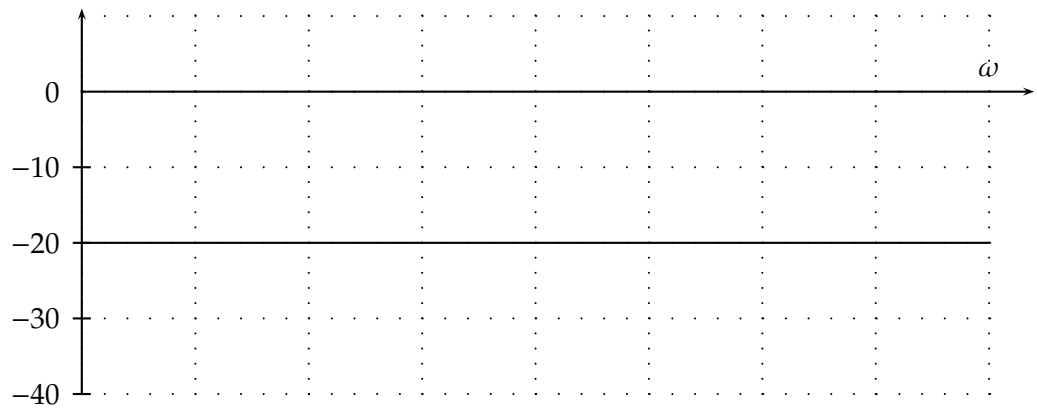
$$\omega_{0,1} = \frac{1}{R_1 C_k}, \quad \omega_{0,2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{1}{C_i + C_k}$$



1. Fall: $\omega_{0,1} = \omega_{0,2}$

$$\frac{1}{R_1 C_k} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \cdot \frac{1}{C_i + C_k}$$

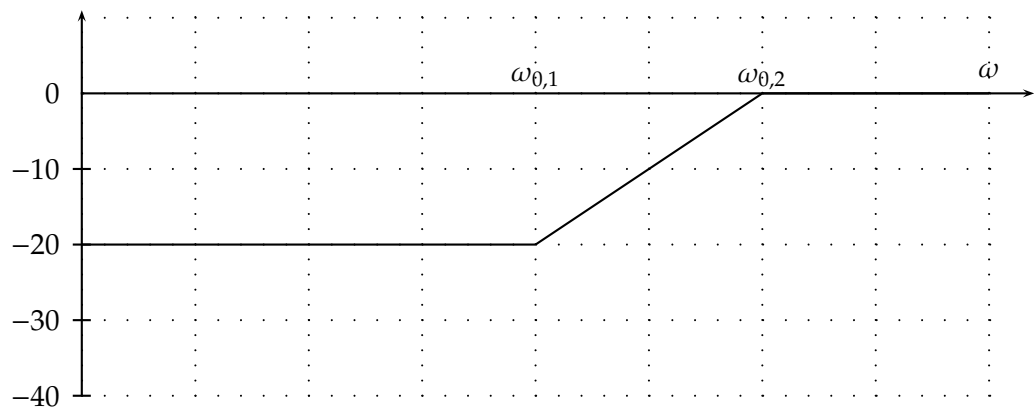
$$\Rightarrow C_k = \frac{R_2}{R_1} C_i = C_{kopt}$$



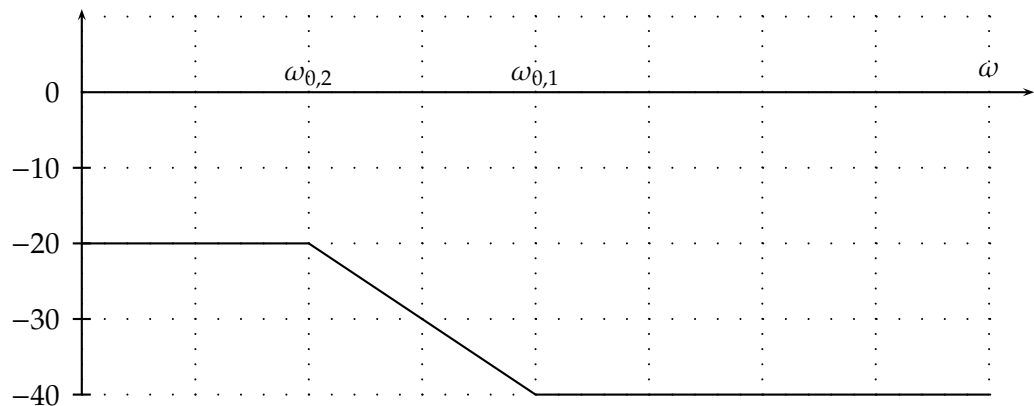
2. Fall: $\omega_{0,1} < \omega_{0,2} \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_{0,1}} > \frac{1}{\omega_{0,2}}$

$$\Rightarrow R_1 C_k > \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (C_i + C_k)$$

$$\Leftrightarrow C_k > \underbrace{\frac{R_2}{R_1} C_i}_{C_{kopt}}$$



3. Fall: $\omega_{0,1} > \omega_{0,2} \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_{0,1}} < \frac{1}{\omega_{0,2}}$
 $\Rightarrow C_k < \frac{R_2}{R_1} C_i$



Aufgabe 3.1:

a) $g(t) = (s(t) \cdot h_1(t)) \cdot h_2(t) = s(t) \cdot \underbrace{(h_1(t) h_2(t))}_{=h(t)}$

wobei $h(t)$ die Gesamt-Impulsantwort des Systems darstellt

b) $h_1(t) = \delta(t) - \frac{1}{R_1 C_1} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}, t \geq 0$

$h_2(t) = \frac{1}{R_2 C_2} e^{-\frac{t}{R_2 C_2}}, t \geq 0$

$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$

$$= \left(\delta(t) - \underbrace{\frac{1}{R_1 C_1} e^{-\frac{t}{R_1 C_1}}}_{=\tilde{h}(t)} \right) * h_2(t)$$

$$= \underbrace{\delta(t)}_{\text{Dirac-Impuls}} * h_2(t) - \tilde{h}(t) * h_2(t)$$

Dirac-Impuls

$$= h_2(t) - \tilde{h}(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) \cdot h_2(t - \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{R_1 C_1} e^{-\frac{\tau}{R_1 C_1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{R_2 C_2} e^{-\frac{t-\tau}{R_2 C_2}} \right) d\tau$$

mit $R_1 C_1 = T_1$ und $R_2 C_2 = T_2$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{T_1} e^{-\frac{\tau}{T_1}} \right) \cdot \left(\frac{1}{T_2} e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} \right) d\tau$$

$$= \frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \int_0^t e^{\frac{\tau}{T_2} - \frac{\tau}{T_1}} d\tau$$

$$= \frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \left[-\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} e^{-\tau \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}} \right]_0^t$$

$$\Rightarrow \tilde{h}(t) = \square(t) \cdot \left(\frac{1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \left(1 - e^{-t \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}} \right) \right)$$

mit $h(t) = h_2(t) - \tilde{h}(t)$

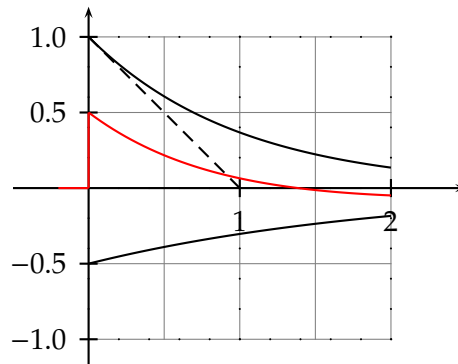
$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} - \frac{1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \left(1 - e^{-t \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_2 - T_1} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{1}{T_2 - T_1} e^{-t \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_2} \right)}$$

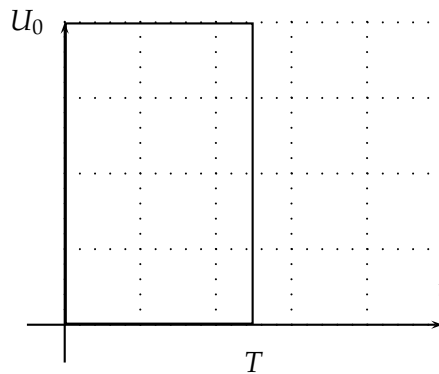
$$= \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_2 - T_1} \right) e^{-\frac{t}{T_2}} + \frac{1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

mit $T_1 = R_1 C_1 = 1 \text{ ms}$ und $T_2 = R_2 C_2 = 2 \text{ ms}$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{1 \text{ ms}} e^{-\frac{t}{1 \text{ ms}}} - \frac{1}{2 \text{ ms}} e^{-\frac{t}{2 \text{ ms}}}$$

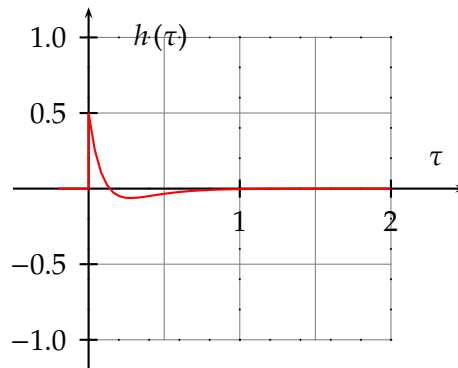


- c) Eingangssignal $S(t) = U_e(t) = U_0 \cdot T \square_{\tau} \left(t - \frac{T}{2} \right)$
mit $U_0 = 1 \text{ V}$, $T = 1 \text{ ms}$



$$g(t) = S(t) * h(t) = h(t) * S(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{1ms} e^{-\frac{t}{1ms}} - \frac{1}{2ms} e^{-\frac{t}{2ms}} = \frac{1}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t}{T_2}}$$



1. Fall: $t < 0 \Rightarrow g(t) = 0$

2. Fall: $0 \leq t < T$

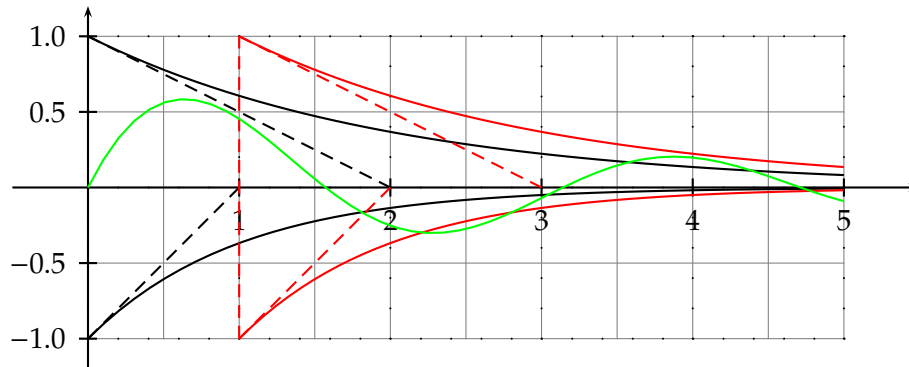
$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^t \left(\frac{1}{T_1} e^{-\frac{\tau}{T_1}} - \frac{1}{T_2} e^{-\frac{\tau}{T_2}} \right) \cdot U_0 d\tau \\ &= \left(\frac{1}{T_1} \left[-T_1 e^{-\frac{\tau}{T_1}} \right]_0^t - \frac{1}{T_2} \left[-T_2 e^{-\frac{\tau}{T_2}} \right]_0^t \right) U_0 \\ &= U_0 \left(\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) - \left(1 - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right) \\ &= U_0 \left(e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \end{aligned}$$

3. Fall: $T \leq t < \infty$

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{t-T}^t \left(\frac{1}{T_1} e^{-\frac{\tau}{T_1}} - \frac{1}{T_2} e^{-\frac{\tau}{T_2}} \right) \cdot U_0 d\tau \\ &= \left(\frac{1}{T_1} \left[-T_1 e^{-\frac{\tau}{T_1}} \right]_{t-T}^t - \frac{1}{T_2} \left[-T_2 e^{-\frac{\tau}{T_2}} \right]_{t-T}^t \right) U_0 \\ &= U_0 \left(\left(e^{-\frac{t-T}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) - \left(e^{-\frac{t-T}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$= U_0 \left(\underbrace{e^{-\frac{t}{T_2}}}_{1} - \underbrace{e^{-\frac{t}{T_1}}}_{2} + \underbrace{e^{-\frac{t-T}{T_1}}}_{3} - \underbrace{e^{-\frac{t-T}{T_2}}}_{4} \right)$$

$T_1 = 1\text{ms}, T_2 = 2\text{ms}$

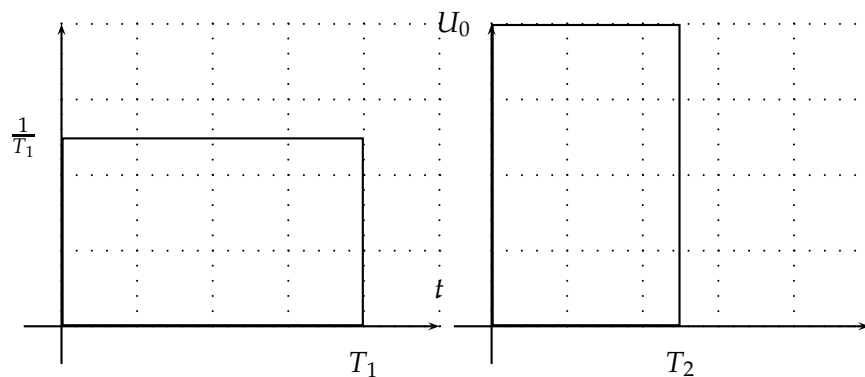


Aufgabe 3.2:

$$T_1 = 3\text{s}, T_2 = 1\text{s}$$

$$h(t) = \text{rect}_{T_1}\left(t - \frac{T_1}{2}\right)$$

$$s(t) = U_0 T_2 \text{rect}_{T_2}\left(t - \frac{T_2}{2}\right)$$



Systemantwort:

$$g(t) = s(t) * h(t) = h(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(t - \tau) d\tau$$

Fallunterscheidung:

1.) $t < 0$:

$$g(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(\tau) d\tau}_{=0} = 0$$

2.) $0 \leq t \leq T_2$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t h(\tau) \cdot s(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{T_1} \cdot U_0 T_2 \frac{1}{T_2} d\tau \\ &= \frac{1}{T_1} U_0 [\tau]_0^t \\ &= U_0 \frac{t}{T_1} \end{aligned}$$

3.) $T_2 \leq t \leq T_1$:

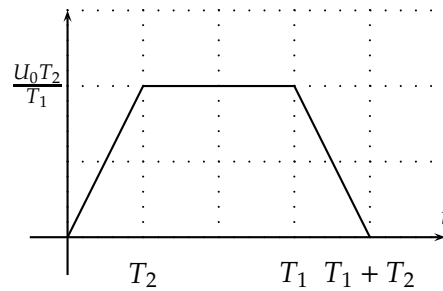
$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(\tau) d\tau \\ &= \int_{t-T_2}^t \frac{1}{T_1} \cdot U_0 d\tau \\ &= \frac{1}{T_1} \cdot U_0 [\tau]_{t-T_2}^t \\ &= \frac{1}{T_1} \cdot U_0 (t - (t - T_2)) \\ &= \frac{1}{T_1} \cdot U_0 \cdot T_2 = \text{const} \end{aligned}$$

4.) $T_1 \leq t \leq T_1 + T_2$:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot s(\tau) d\tau \\ &= \int_{t-T_2}^{T_1} \frac{1}{T_1} \cdot U_0 d\tau \\ &= \frac{1}{T_1} \cdot U_0 [\tau]_{t-T_2}^{T_1} \\ &= \frac{1}{T_1} \cdot U_0 \cdot (T_1 - (t - T_2)) \\ &= \frac{1}{T_1} \cdot U_0 \cdot (T_1 + T_2 - t) \end{aligned}$$

Einsetzen von T_1 und T_2 :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{3s} \cdot t, & 0 \leq t \leq T_2 \\ \frac{U_0}{3}, & T_2 \leq t \leq T_1 \\ \frac{U_0}{3s} (4s - t), & T_1 \leq t \leq T_1 + T_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgabe 3.3:

a) $g(t) = \underbrace{s(t)}_{\text{direkter Weg}} + r \cdot \underbrace{s(t - \tau)}_{\text{indirekter Weg}}$

Laufzeitunterschied:

$$v = c = \frac{\Delta s}{T} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{\Delta s}{c} = \frac{60 \text{m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 0.2 \text{ns}$$

b) $g(t) = s(t) - r \cdot s(t - T)$

Impulsantwort:

$$h(t) = \delta(t) + r \cdot \delta(t - \tau)$$

c) Übertragungsfunktion:

1. Weg: Fourierintegral

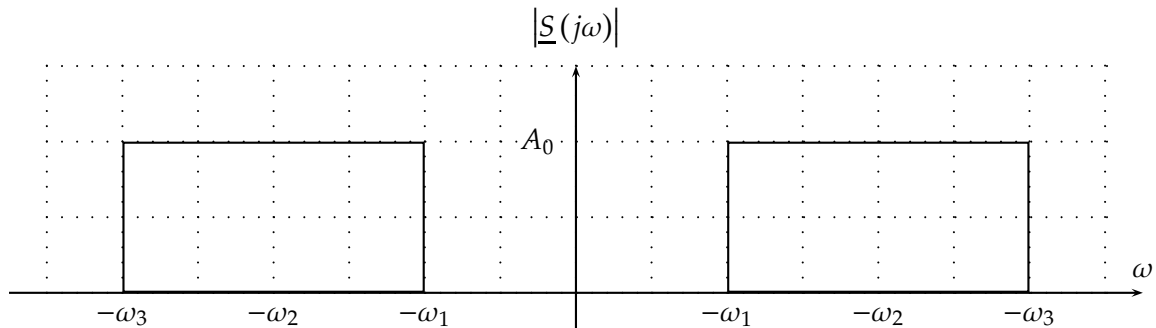
$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega\tau} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t) + r \cdot \delta(t - \tau)) \cdot e^{-j\omega\tau} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega\tau} dt + \int_{-\infty}^{\infty} r \cdot \delta(t - \tau) \cdot e^{-j\omega\tau} dt \\ \text{Ausblendeigenschaft} &= 1 + r \cdot e^{-j\omega\tau} \end{aligned}$$

2. Weg: Fouriertransformation

$$\begin{aligned} g(t) &= s(t) + r \cdot s(t - \tau) \\ \underline{G}(j\omega) &= \underline{S}(j\omega) + r \cdot \underline{S}(j\omega) e^{-j\omega\tau} \\ \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{G}(j\omega)}{\underline{S}(j\omega)} = 1 + r \cdot e^{-j\omega\tau} \\ &= 1 + r \cdot \cos(\omega\tau) - jr \cdot \sin(\omega\tau) \end{aligned}$$

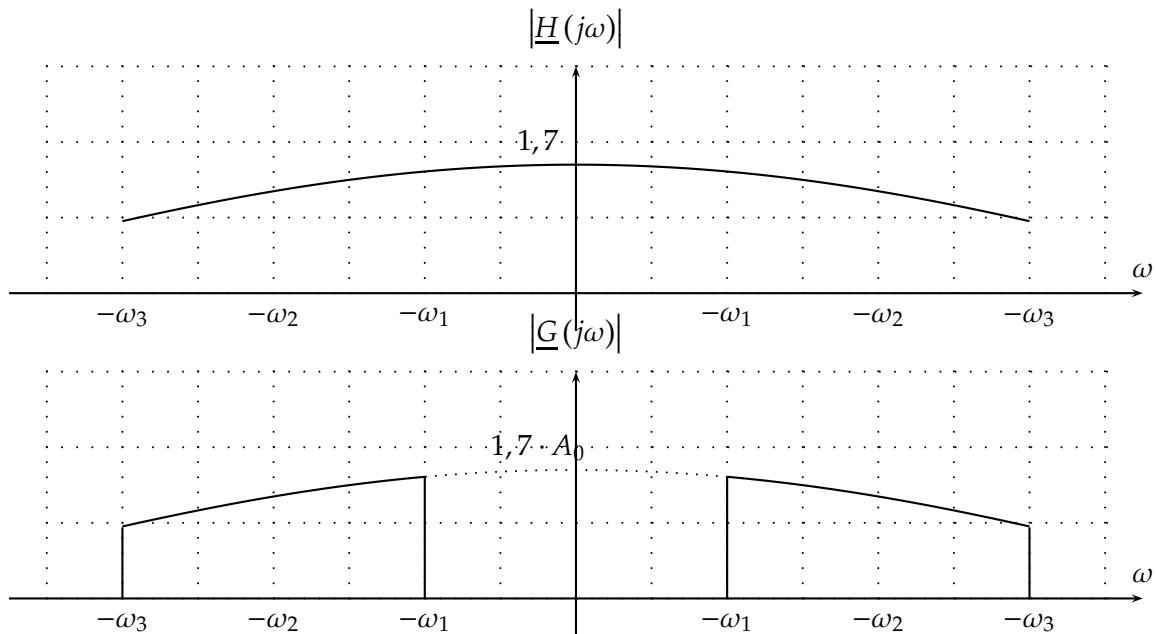
$$\begin{aligned} |\underline{H}(j\omega)| &= \sqrt{(1 + r \cdot \cos(\omega\tau))^2 + (r \cdot \sin(\omega\tau))^2} \\ &= \sqrt{1 + 2r \cos(\omega\tau) + r^2 \cos^2(\omega\tau) + r^2 \sin^2(\omega\tau)} \\ &= \sqrt{1 + 2r \cos(\omega\tau) + r^2} \end{aligned}$$

d) $\omega_1 = 2\pi \cdot 525 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$
 $\omega_3 = 2\pi \cdot 1605 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$
 $\omega_2 = \frac{\omega_1 + \omega_3}{2} = 2\pi \cdot 1065 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$
 $\Delta\omega = \omega_3 - \omega_1 = 2\pi \cdot 1080 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$



$$|\underline{S}(j\omega)| = A_0 \cdot \Delta\omega \cdot \text{rect}_{\Delta\omega}(\omega + \omega_2) + A_0 \cdot \Delta\omega \cdot \text{rect}_{\Delta\omega}(\omega - \omega_2)$$

e) $\underline{G}(j\omega) = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{S}(j\omega)$
 $|\underline{G}(j\omega)| = |\underline{H}(j\omega)| \cdot |\underline{S}(j\omega)|$
 $|\underline{H}(0)| \approx 1.7$
 $|\underline{H}(\omega_1)| \approx 1.61$
 $|\underline{H}(\omega_2)| \approx 1.35$
 $|\underline{H}(\omega_3)| \approx 0.94$



Aufgabe 3.4:

a) Ein Differenzierer ist ein wichtiges Element, besonders in der Regelungstechnik.

Annahme:

$$s(t) = e^{j\omega t + \Theta}$$

Differenziation:

$$g(t) = \frac{d}{dt}s(t) = j\omega e^{j\omega t + \Theta}$$

$$\Rightarrow \underline{h}(j\omega) = \frac{g(t)}{s(t)} = j\omega$$

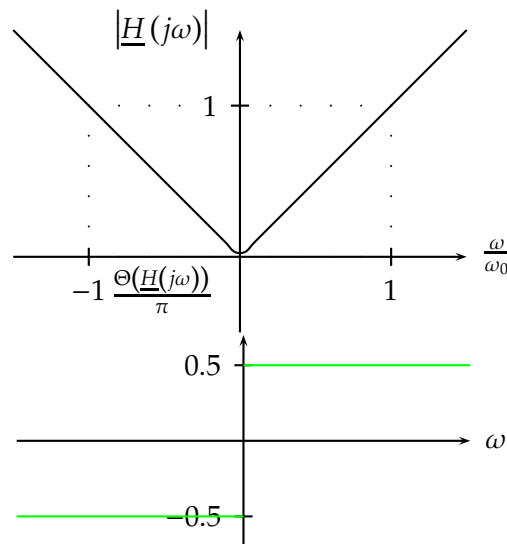
ω ist dimensionsbehaftet, daher die normierte Darstellung:

$$s(t) = e^{j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{t}{t_0} + \Theta} \text{ mit } \omega_0 t_0 = 1 \text{ und } \frac{t}{t_0} = \tau$$

$$g(\tau) = \frac{d}{d\tau}s(\tau) = j\frac{\omega}{\omega_0} e^{j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{t}{t_0} + \Theta} = j\frac{\omega}{\omega_0} s(\tau)$$

$$\rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{g(\tau)}{s(\tau)} = \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- rein imaginär
- Phase: $\frac{\pi}{2}$ für $\omega > 0$, $-\frac{\pi}{2}$ für $\omega < 0$

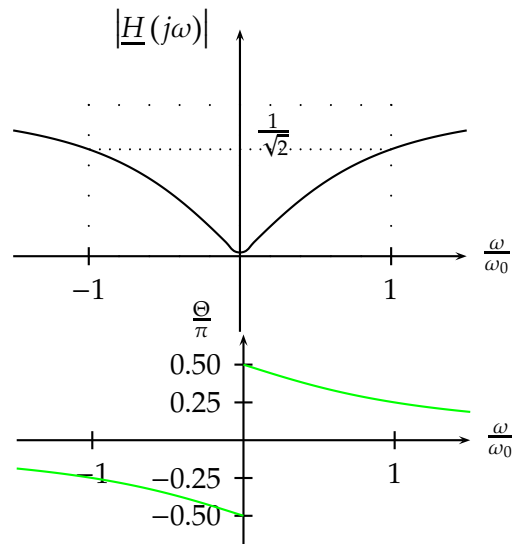


b) RC-Hochpass:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$\text{mit } \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega RC$$

$$\underline{H}(j\Omega) = j\Omega \underbrace{\frac{1}{1 + j\Omega}}_{\rightarrow 1, \omega \ll \omega_0}$$



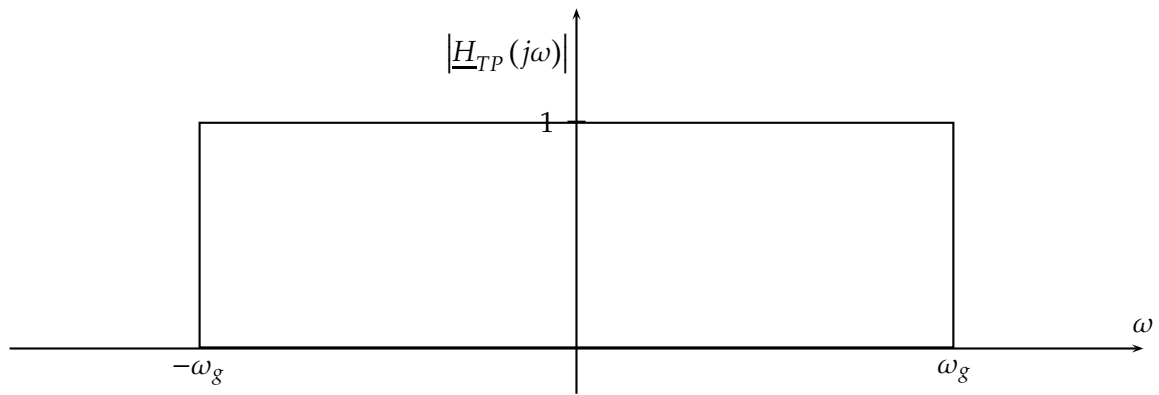
Abweichungen von der Übertragungsfunktion des idealen Differenzierers bei $\omega = \frac{\omega_0}{10}$:

$$\begin{aligned}
 |H_{HP}(j\omega)|_{\omega=\frac{\omega_0}{10}} &= \left| \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \right| \\
 &= \frac{\frac{1}{10}}{\sqrt{1+\frac{1}{100}}} \approx 0.0995 \\
 |H(j\omega)| &= \left| j\frac{\omega}{\omega_0} \right| = \frac{1}{10} = 0.1 \\
 &\Rightarrow \text{Abweichung } 5\%
 \end{aligned}$$

Phase:

$$\begin{aligned}
 \arg(H_{HP}(j\omega)_{\omega=\frac{\omega_0}{10}}) &= \arg(j\frac{\omega}{\omega_0}) - \arg(1+j\frac{\omega}{\omega_0}) \\
 &= \arctan\left(\frac{\Im(j\frac{\omega}{\omega_0})}{\Re(j\frac{\omega}{\omega_0})}\right) - \arctan\left(\frac{\Im(1+j\frac{\omega}{\omega_0})}{\Re(1+j\frac{\omega}{\omega_0})}\right) \\
 &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{10}}{0}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{1}{10}}{1}\right) \\
 &= \frac{\pi}{2} - 0.032\pi \approx 0.468\pi \\
 \arg(H(j\omega)_{\omega=\frac{\omega_0}{10}}) &= \frac{\pi}{2} \\
 &\Rightarrow \text{Abweichung } \approx 6\%
 \end{aligned}$$

Abweichungen sind für $\omega = \frac{\omega_0}{10}$ tolerierbar.



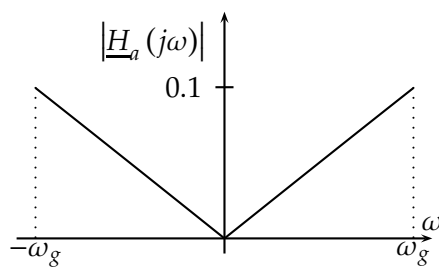
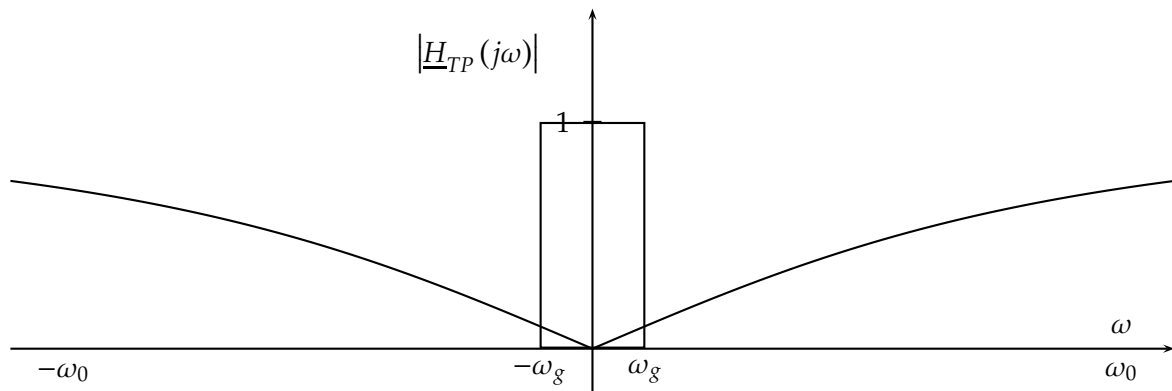
c)

idealer Tiefpass, $\omega_g = 0.1\omega_0$

$$\underline{H}_{TP}(j\omega) = 2\omega_g \text{rect}_{2\omega_g}(\omega)$$

→ Approx. Differenzierer

$$\underline{H}_a(j\omega) = \underline{H}_{TP}(j\omega) \cdot \underline{H}_{HP}(j\omega)$$



$$\underline{H}_a(j\omega) = \underbrace{(2\omega_g \text{ } \sqcap \text{ } 2\omega_g(\omega))}_{=\underline{H}_{TP}} \underbrace{\left(\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right)}_{=\underline{H}_{HP}}$$

$$\text{mit } \omega_g = 0.1\omega_0$$

$$\Rightarrow \underline{H}_a(j\omega) = (0.2\omega_0 \text{ } \sqcap \text{ } 0.2\omega_0(\omega)) \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

d) Impulsantwort eines idealen Tiefpasses:

(1) Fourier Rücktransformation:

$$\begin{aligned} h_{TP}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}_{TP}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_g}^{\omega_g} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jt} e^{j\omega t} \right]_{-\omega_g}^{\omega_g} \\ &= \frac{1}{2j\pi t} \underbrace{(e^{j\omega_g t} - e^{-j\omega_g t})}_{=2j\sin(\omega_g t)} \\ &= \frac{1}{\pi t} \sin(\omega_g t) \\ &= \frac{1}{\pi} \omega_g \frac{\sin(\omega_g t)}{\omega_g t} \\ &= \frac{1}{\pi} \omega_g \text{si}(\omega_g t) \end{aligned}$$

(2) Korrespondenz-Tabelle:

$$1) s(t) = \sqcap \sqcap_T(t) \circ \bullet S(\omega) = \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

2) Symmetriesatz:

$$\begin{aligned} S(t) &\circ \bullet 2\pi s(-\omega) \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi} S(t) &\circ \bullet s(-\omega) \end{aligned}$$

hier:

$$\sqcap \sqcap_{\omega_f}(\omega) \bullet \circ \frac{1}{2\pi} \text{si}\left(-\frac{\omega_f t}{2}\right)$$

$$\text{mit } \omega_f = 2\omega_g$$

$$\Rightarrow \underline{H}_{TP}(j\omega) = 2\omega_g \sqcap \sqcap_{2\omega_g}(\omega)$$

•

$$h_{TP}(t) = 2\omega_g \left(\frac{1}{2\pi} \text{si}\left(-\frac{2\omega_g t}{2}\right) \right)$$

$$= \omega_g \frac{1}{\pi} \text{si}\left(-\frac{2\omega_g t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \underline{H}_a(j\omega) &= \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \cdot \underline{H}_{TP}(j\omega) \\ &= \frac{1}{\omega_0}(j\omega) \cdot \underline{H}_{TP}(j\omega) \end{aligned}$$

$$h_a(t) = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{\omega_g}{\pi} \cdot \sin(\omega_g t)}_{h_{TP}(t)} \right) \right)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} s(t) \circ \bullet (j\omega)^n S(j\omega)$$

$$h_a(t) = \frac{\omega_g}{\omega_0} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \frac{\sin(\omega_g t)}{\omega_g t}$$

$$\text{Quotientenregel: } \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$= \frac{\omega_g}{\pi \omega_0} \cdot \left[\frac{\omega_g^2 \cos(\omega_g t) t - \omega_g \sin(\omega_g t)}{(\omega_g t)^2} \right]$$

$$= \frac{\omega_g}{\pi \omega_0} \cdot \left[\omega_g \frac{\cos(\omega_g t)}{\omega_g t} - \frac{\sin(\omega_g t)}{\omega_g t^2} \right]$$

$$= \frac{\omega_g}{\pi \omega_0} \frac{1}{t} \left[\cos(\omega_g t) - \sin(\omega_g t) \right]$$

$$\text{mit } \omega_g = 0.1 \omega_0$$

$$= 0.1 \frac{1}{\pi} \frac{1}{t} \left[\cos\left(\frac{\omega_0 t}{10}\right) - \sin\left(\frac{\omega_0 t}{10}\right) \right]$$

f) $s(t) = \cos(\omega_s t) \quad \omega_s = \frac{1}{2} \omega_g = \frac{1}{20} \omega_0$
 $g(t) = s(t) * h_a(t) \Rightarrow \text{SEHR KOMPLIZIERT}$
 $\Rightarrow \text{Berechnung im Frequenzbereich einfacher!}$
 $s(t) \circ \bullet S(j\omega) = \pi [\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)]$
 $\underline{G}(j\omega) = \underline{S}(j\omega) \cdot \underline{H}_a(j\omega)$
 $= \pi [\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)] \underbrace{\left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right) 2\omega_g \text{rect}_{2\omega_g}(\omega)}_{=1 \text{ für } -\omega_s \leq \omega \leq \omega_s}$
 $= \left(j \frac{\pi}{\omega_0} \right) [\omega \delta(\omega + \omega_s) + \omega \delta(\omega - \omega_s)]$
 $= \left(j \frac{\pi}{\omega_0} \right) \omega_s [-\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)]$

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(j \frac{\pi}{\omega_0} \omega_s \right) [-\delta(\omega + \omega_s) + \delta(\omega - \omega_s)] \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(j \frac{\pi}{\omega_0} \omega_s \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} -\delta(\omega + \omega_s) e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_s) e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(j \frac{\pi}{\omega_0} \omega_s \right) \left[-e^{j\omega_s t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_s) d\omega + e^{j\omega_s t} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_s) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(j \frac{\omega_s}{\omega_0} \right) \underbrace{\left[e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_s t} \right]}_{=2j \sin(\omega_s t)} \\ &= -\frac{\omega_s}{\omega_0} \sin(\omega_s t) \\ &= -\frac{1}{20} \sin\left(\frac{1}{20} \omega_0 t\right) \end{aligned}$$

Plausibilitätskontrolle:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{d}{d\tau} (\cos(\omega_s t)), \text{ mit } \tau = \frac{t}{t_0} = \omega_0 t = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{d\tau} \cos(\omega_s t) \right), \text{ mit } \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega_0} \cos(\omega_s t) \right) \\ &= -\frac{\omega_s}{\omega_0} \sin(\omega_s t), \text{ mit } \omega_s = \frac{1}{20} \omega_0 \\ &= -\frac{1}{20} \sin\left(\frac{1}{20} \omega_0 t\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5:

a) Impulsantwort:

$$g(t) = -0.25s(t) + 0.5s(t - \tau) - 0.25s(t - 2\tau)$$

$$\text{mit } s(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = -0.25\delta(t) + 0.5\delta(t - \tau) - 0.25\delta(t - 2\tau)$$

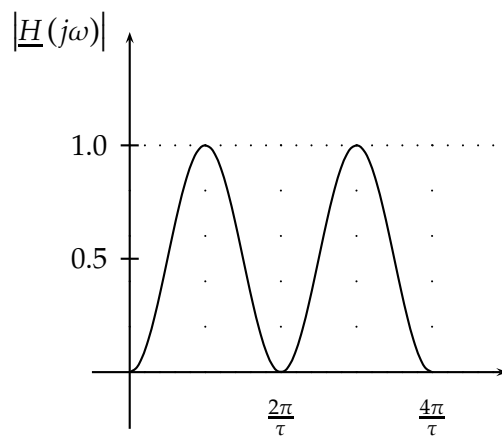
Übertragungsfunktion laut Korrespondenztabelle:

$$\underline{H}(j\omega) = -0.25 + 0.5e^{-j\omega\tau} - 0.25e^{-j2\omega\tau}$$

$$= e^{-j\omega\tau} (-0.25e^{j\omega\tau} - 0.25e^{-j\omega\tau} + 0.5)$$

$$= e^{-j\omega\tau} (-0.5 \cos(\omega\tau) - 0.25j \sin(\omega\tau) + 0.25j \sin(\omega\tau) + 0.5)$$

$$= 0.5e^{-j\omega\tau} (1 - \cos(\omega\tau))$$

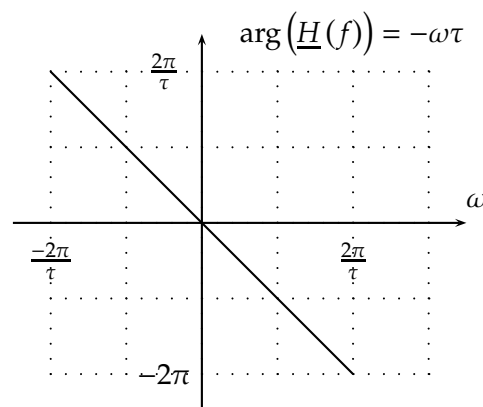


Phasenermittlung in 3 Teilschritten:

$$0.5 \rightarrow \text{Phase } 0$$

$$1 - \cos(\omega\tau) \geq 0 \rightarrow \text{rein reell, Phase } 0$$

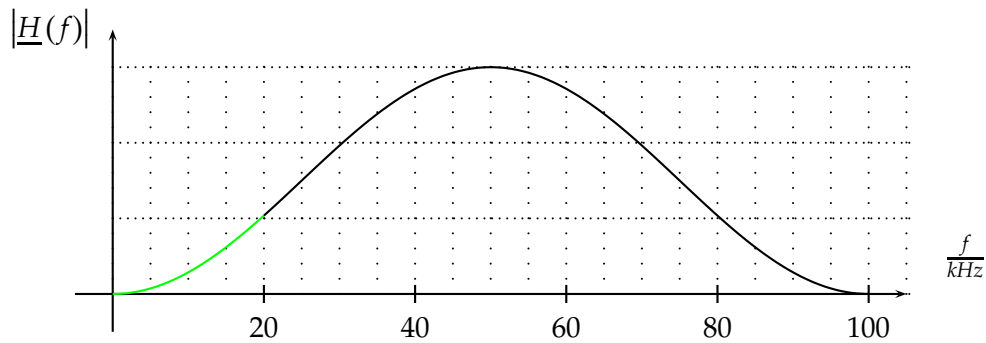
$$e^{-j\omega\tau} \rightarrow \text{Phase } -\omega\tau$$



→ Das System ist linearphasig. Es erfährt keine Signalverzerrung, nur eine Signalverzögerung.

b) Amplitudengang ist periodisch mit $\omega = 2\pi f \frac{2\pi}{\tau}$ (hier: $\tau = 10\text{ps}$).

$$\text{Periodizität: } f_p = \frac{1}{\tau} = 10^5 \text{Hz} = 100\text{kHz}$$



Für Signale im Hörbereich:

- Hochpass-Charakter
- Abschwächung der Amplitude

c) Impulsantwort:

$$h(t) = 0.25\delta(t) - 0.25\delta(t - 2\tau)$$

Übertragungsfunktion:

$$\underline{H}(j\omega) = -0.25 \cdot 1 - 0.25 \cdot e^{-j\omega 2\tau}$$

$$= e^{-j\omega\tau} \left(-0.25 \left(\underbrace{e^{j\omega\tau}}_{=\cos(j\omega\tau) + j\sin(\omega\tau)} + \underbrace{e^{-j\omega\tau}}_{=\cos(j\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)} \right) \right)$$

$$= e^{-j\omega\tau} (-0.5 \cos(\omega\tau))$$

Betrag:

$$|\underline{H}(j\omega)| = |e^{-j\omega\tau}| \cdot |-0.5 \cos(\omega\tau)|$$

$$= |\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)| \cdot |-0.5 \cos(\omega\tau)|$$

$$= \sqrt{\underbrace{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)}_{=1}} \cdot |-0.5 \cos(\omega\tau)|$$

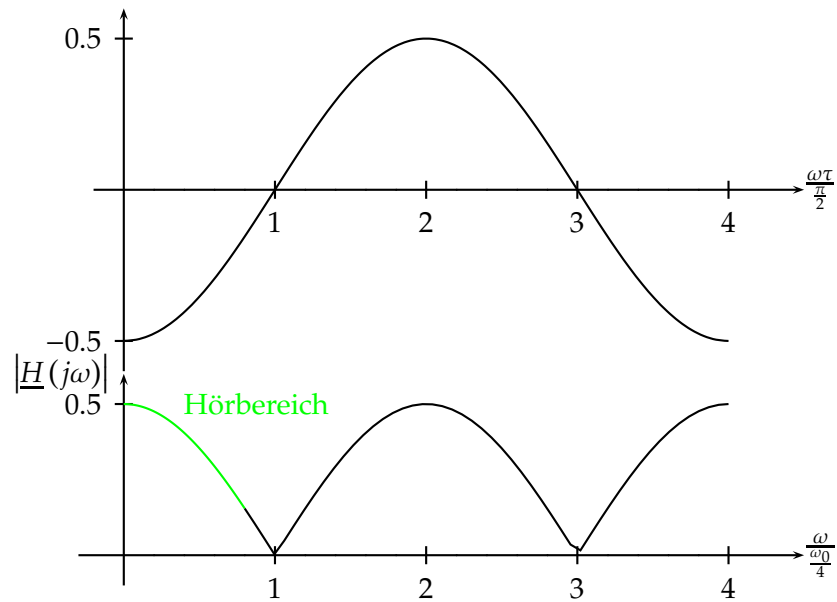
$$= |-0.5 \cos(\omega\tau)|$$

Phase:

$$\Theta(\underline{H}(j\omega)) = k(\omega) - \omega\tau$$

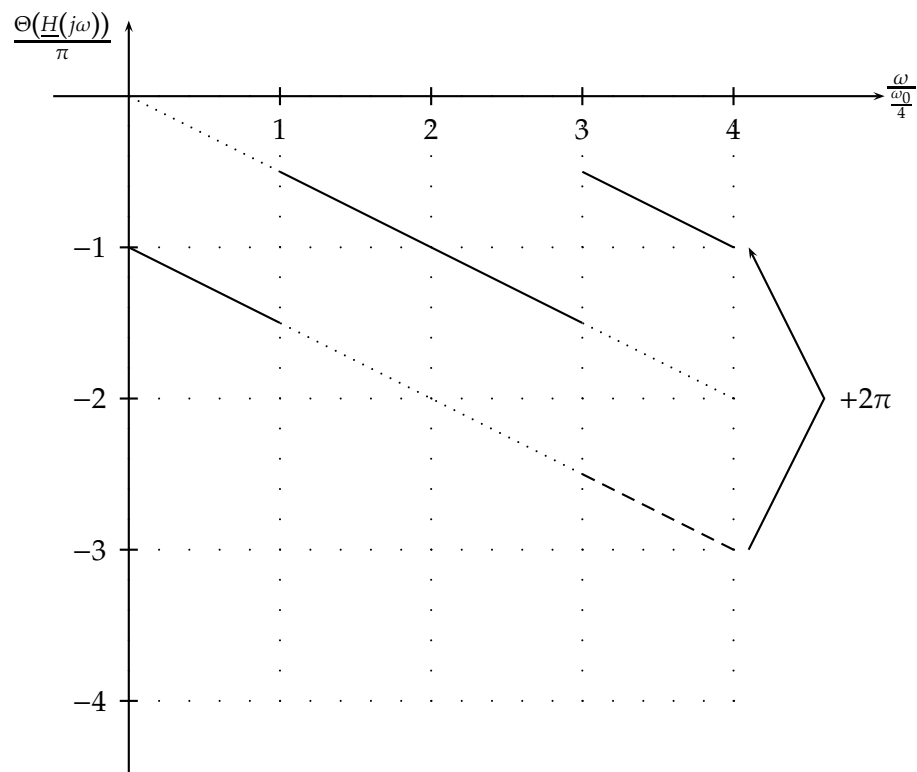
$$\text{mit } k(\omega) = \begin{cases} -\pi \\ 0 \end{cases}$$

Untersuchung der Phase:



$$\omega_0\tau = 2\pi \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\pi}{5 \cdot 10^6 \frac{1}{s}}$$

$$f_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 100 \text{ kHz}$$



⇒ Das System hat im Hörbereich eine Tiefpass-Charakteristik

Einschub (Laplace-Transformation):

- Erweiterung der Fourier-Transformation
- Auch auf anklingende Funktionen anwendbar
- Nutzen:
 - Lösung von Differentialgleichungen
 - Stabilitätsanalyse von Systemen

Allgemeine Übertragungsfunktion im Laplace-Raum:

$$\underline{H}(p) = \frac{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu} p^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} p^{\nu}} = \frac{\underline{Z}(p)}{\underline{N}(p)}$$

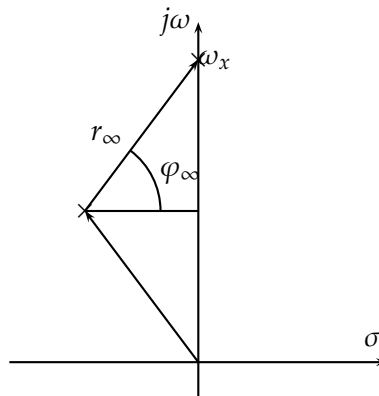
Schreibweise mit Linearfaktoren:

$$\underline{H}(p) = \frac{a_m}{a_n} \frac{\prod_{\mu=0}^m (p - p_{0,\mu})}{\prod_{\nu=0}^n (p - p_{\infty,\nu})}$$

⇒ Bedingung für Stabilität: Alle Polstellen $p_{\infty,\nu}$ besitzen einen negativen Realteil.

⇒ Falls die Stabilität gegeben ist, existiert die Fourier-Transformation:

$$\underline{H}(j\omega) = c \frac{\prod_{\mu=0}^m (j\omega - p_{0,\mu})}{\prod_{\nu=0}^n (j\omega - p_{\infty,\nu})}$$

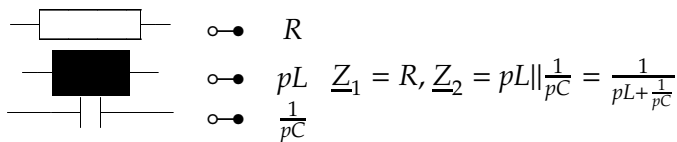


$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega_x) &= c \frac{\prod_{\mu=0}^m (j\omega - p_{0,\mu})}{\prod_{\nu=0}^n (j\omega - p_{\infty,\nu})} \\ &= c \frac{\prod_{\mu=0}^m r_{0,\mu} e^{j\varphi_{0,\mu}}}{\prod_{\nu=0}^n r_{\infty,\nu} e^{j\varphi_{\infty,\nu}}} \end{aligned}$$

$$= c \underbrace{\frac{\prod_{\mu=0}^m r_{0,\mu}}{\prod_{v=0}^n r_{\infty,v}}}_{\text{Betrag}} \underbrace{e^{j \left(\sum_{\mu=0}^m \varphi_{0,\mu} - \sum_{v=0}^n \varphi_{0,v} \right)}}_{\text{Phase}}$$

⇒ Qualitative Abschätzung von $\underline{H}(j\omega)$ durch Pol-Nullstellen-Diagramm.

Aufgabe 4.1:



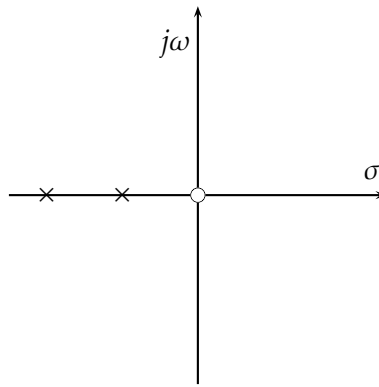
$$\begin{aligned} \text{a) } \underline{H}(p) &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\frac{1}{pL + \frac{1}{pC}}}{R + \frac{1}{pL + \frac{1}{pC}}} \\ &= \frac{1}{R(pL + \frac{1}{pC}) + 1} \\ &= \frac{\frac{p}{RC}}{p^2 \frac{L}{C} + \frac{1}{C^2} + \frac{p}{RC}} \\ &= \frac{\frac{L}{C} \frac{p}{RL}}{\frac{L}{C} (p^2 + \frac{1}{LC} + \frac{p}{RL})} \\ &= \frac{p \frac{1}{RL}}{p^2 + p \frac{1}{RL} + \frac{1}{LC}} = \frac{\underline{Z}(p)}{\underline{N}(p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ Nullstellen: } \underline{Z}(p) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow p \frac{1}{RL} &= 0 \Leftrightarrow p_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Polstellen: } \underline{N}(p) &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow p_{\infty}^2 + p_{\infty} \frac{1}{RL} + \frac{1}{LC} &= 0 \\ \Leftrightarrow p_{\infty,1,2} &= -\frac{1}{2RC} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}_{\text{variabel}} \end{aligned}$$

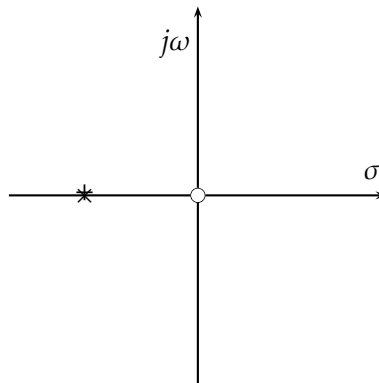
positiv für $\frac{1}{LC} < \frac{1}{4R^2C^2} \Rightarrow L > 4R^2C$
 $p_{\infty,1}$ und $p_{\infty,2}$ sind reell, aber unterschiedlich:

$$\begin{aligned} p_{\infty,1} &= -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ L \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{1}{LC} \rightarrow 0 \Rightarrow p_{\infty,1} \rightarrow -\frac{1}{RC} \\ p_{\infty,2} &= -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ L \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{1}{LC} \rightarrow 0 \Rightarrow p_{\infty,2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$



Null für $\frac{1}{LC} = \frac{1}{4R^2C^2} \Leftrightarrow L = 4R^2C$

Doppelte Polstelle bei $p_{\infty,1} = p_{\infty,2} = -\frac{1}{2RC}$

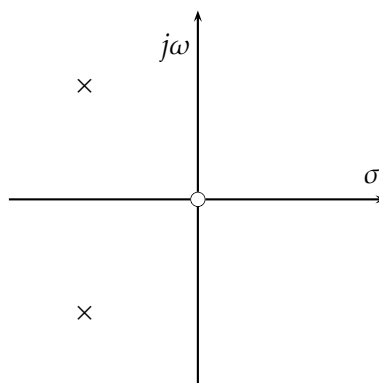


negativ für $\frac{1}{LC} > \frac{1}{4R^2C^2} \Rightarrow L < 4R^2C$

$p_{\infty,1}$ und $p_{\infty,2}$ sind komplex konjugiert:

$$p_{\infty,1} = -\frac{1}{2RC} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$

$$p_{\infty,2} = -\frac{1}{2RC} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$$



- b) Annahme: zwei konjugiert komplexe Polstellen, $L < 10mH$
Eingangssignal: Sprung

$$(t) \circ \bullet \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

$$\underline{H}(p) = \frac{1}{RC} \frac{p}{(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})}, p_{\infty,1}^* = p_{\infty,2}$$

Antwort des Systems:

$$\begin{aligned} \underline{G}(p) &= \underline{S}(p) \cdot \underline{H}(p) \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{RC} \frac{p}{(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})} \\ &= \frac{1}{RC(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})} \end{aligned}$$

Rücktransformation mit Hilfe von Transformationstabellen (Skript, Bronstein).

wichtige Korrespondenz:

$$e^{\alpha t}(t) \circ \bullet \frac{1}{p-\alpha}$$

→ Dazu ist meist eine Partialbruchzerlegung notwendig:

$$\underline{H}(p) = \sum_{i=0} n \frac{c_i}{p-p_{\infty,i}}, c_i \in \mathbb{C}$$

Hier:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})} &\stackrel{!}{=} \frac{c_1}{p-p_{\infty,1}} + \frac{c_2}{p-p_{\infty,2}} \\ &= \frac{c_1(p-p_{\infty,2}) + c_2(p-p_{\infty,1})}{(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})} \\ \Rightarrow 1 &= c_1(p-p_{\infty,2}) + c_2(p-p_{\infty,1}) \\ &= c_1 p - c_1 p_{\infty,2} + c_2 p - c_2 p_{\infty,1} \\ \Rightarrow \begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \Leftrightarrow c_1 = -c_2 \\ 1 = -c_1 p_{\infty,2} - c_2 p_{\infty,1} = c_1(p_{\infty,1} - p_{\infty,2}) \end{cases} \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{p_{\infty,1} - p_{\infty,2}}, c_2 = -\frac{1}{p_{\infty,1} - p_{\infty,2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{G}(p) &= \frac{1}{RC} \frac{1}{(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})} \\ &= \frac{1}{RC} \left(\frac{1}{p_{\infty,1} - p_{\infty,2}} \frac{1}{p-p_{\infty,1}} - \frac{1}{p_{\infty,1} - p_{\infty,2}} \frac{1}{p-p_{\infty,2}} \right) \\ &= \frac{1}{RC} \frac{1}{p_{\infty,1} - p_{\infty,2}} \left(\frac{1}{p-p_{\infty,1}} - \frac{1}{p-p_{\infty,2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{RC} \frac{1}{p_{\infty,1} - p_{\infty,2}} (e^{p_{\infty,1}t} - e^{p_{\infty,2}t}) \\ \text{mit } p_{\infty,1} &= -\sigma_{\infty} + j\omega_{\infty}, p_{\infty,2} = -\sigma_{\infty} - j\omega_{\infty} = p_{\infty,1}^* \\ &= \frac{1}{RC} \frac{1}{2j\omega_{\infty}} (e^{(-\sigma_{\infty} + j\omega_{\infty})t} - e^{(-\sigma_{\infty} - j\omega_{\infty})t}) \\ &= \frac{1}{RC} \frac{1}{2j\omega_{\infty}} e^{-\sigma_{\infty}t} \underbrace{(e^{j\omega_{\infty}t} - e^{-j\omega_{\infty}t})}_{=2j\sin(\omega_{\infty}t)} \\ &= \frac{1}{RC} \frac{1}{\omega_{\infty}} e^{-\sigma_{\infty}t} \sin(\omega_{\infty}t) \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung.

$$c) L = 63\mu H, C = 10nF, R = 500\Omega$$

$$\sigma_{\infty} = \frac{1}{2RC} = 10^5 \frac{1}{s}$$

$$\omega_{\infty} = \sqrt{-\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} \approx 1.26 \cdot 10^6 \frac{1}{s}$$

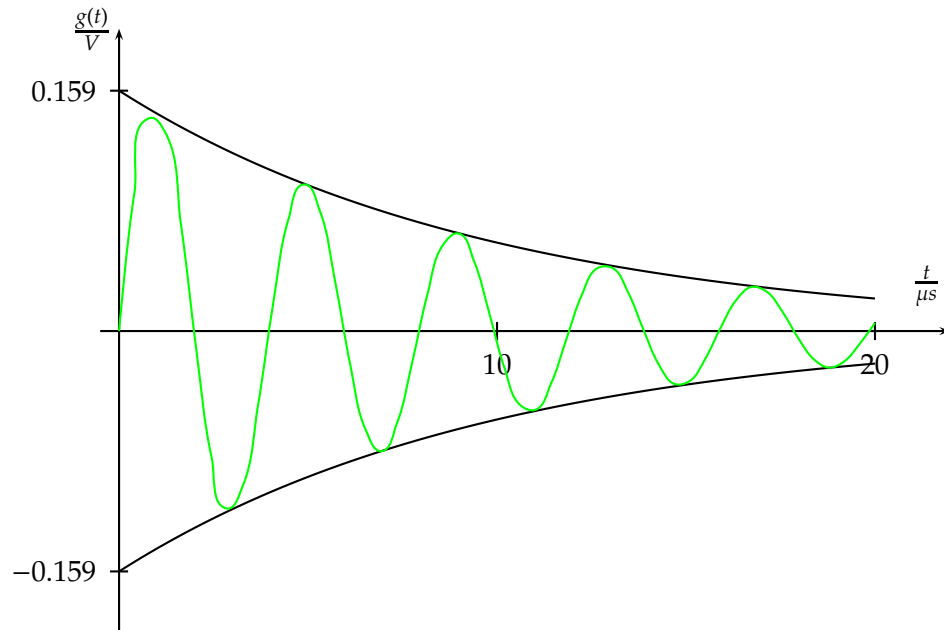
$$f_{\infty} = \frac{\omega_{\infty}}{2\pi} \approx 0.2 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$\frac{1}{RC\omega_\infty} = 2 \frac{10^5 \frac{1}{s}}{1.26 \cdot 10^6 \frac{1}{s}} \approx 0.159$$

Sinus Amplitude $A = 0.159$

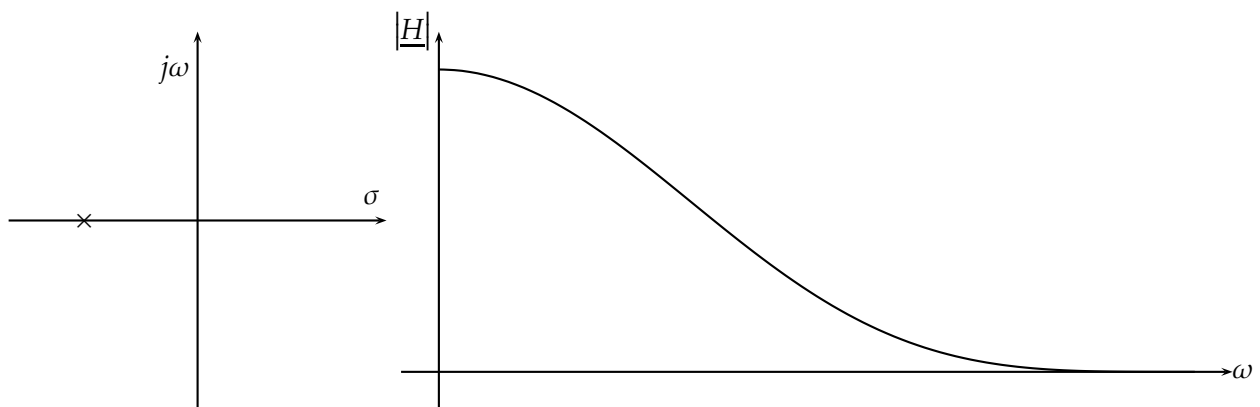
$$\text{Periodenlänge } T = \frac{1}{f_\infty} = 5 \mu s$$

Exponentialfunktion Zeitkonstante $\tau = \frac{1}{\sigma_\infty} = 10^{-5} s = 10 \mu s$



Aufgabe 4.2:

- (1) $\omega = \frac{\omega_p}{2|\sigma_\infty|}$
 Maximalflach, $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, „Butterworth“



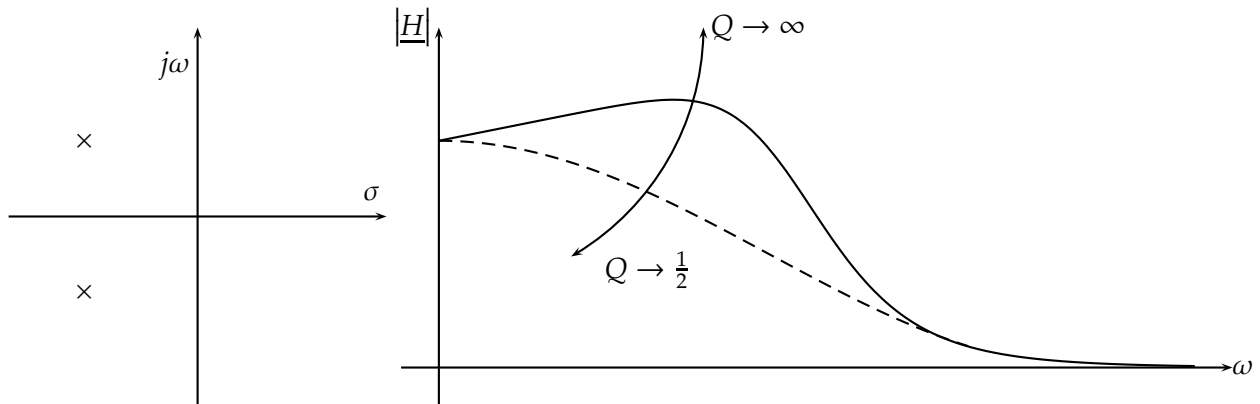
- (2) $\omega_\infty :=$ Imaginärteil der Polstelle, $\sigma_\infty :=$ Realteil der Polstelle
 $\omega_p :=$ Entfernung der Polstelle zum Ursprung

$$\omega_p^2 = \omega_\infty^2 + |\sigma_\infty|^2$$

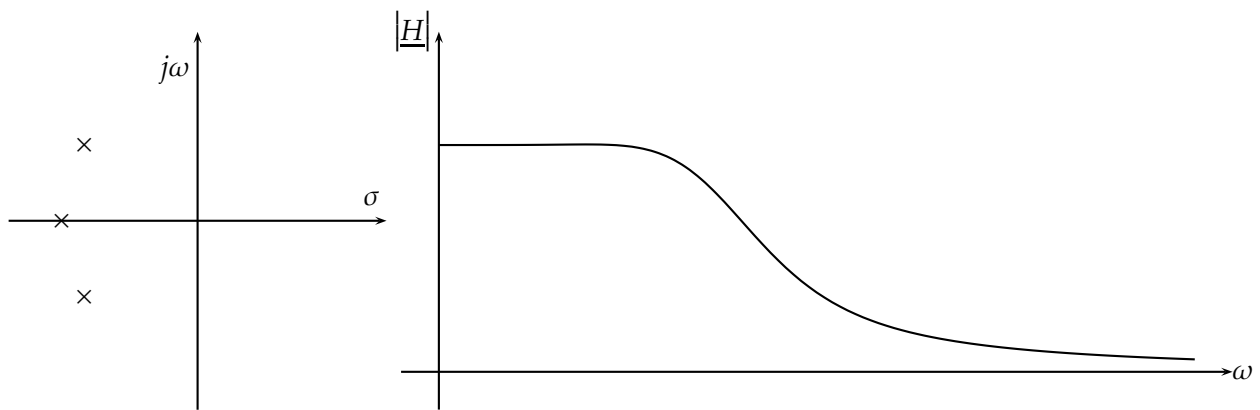
$$\omega_\infty < |\sigma_\infty| \rightarrow Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_\infty = |\sigma_\infty| \rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

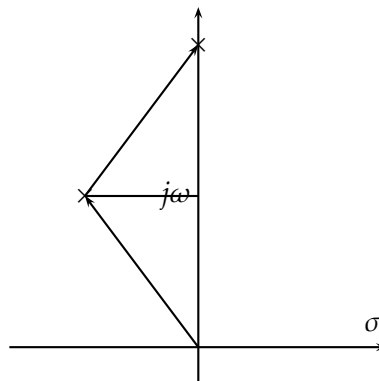
$$\omega_\infty > |\sigma_\infty| \rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$



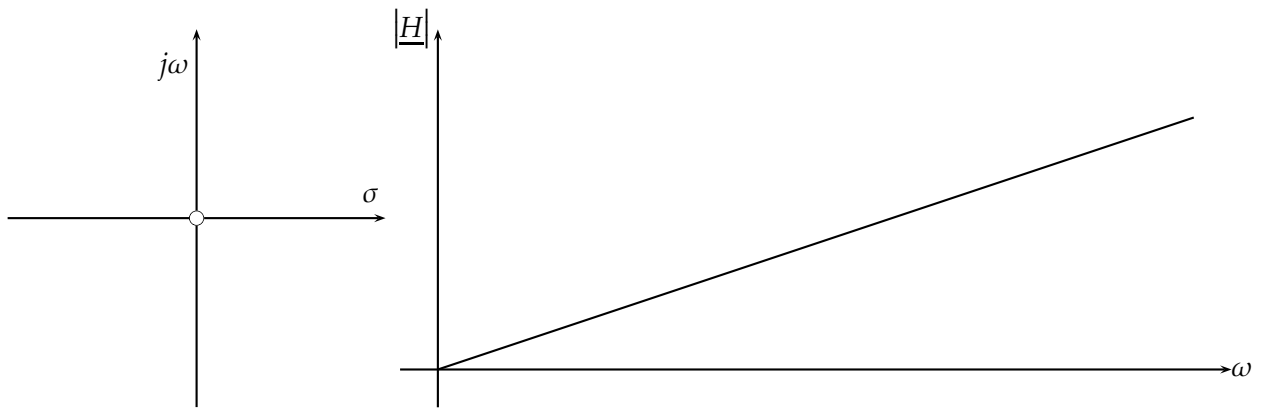
(3) Maximalflach, alle Polstellen liegen auf einem Kreisbogen.



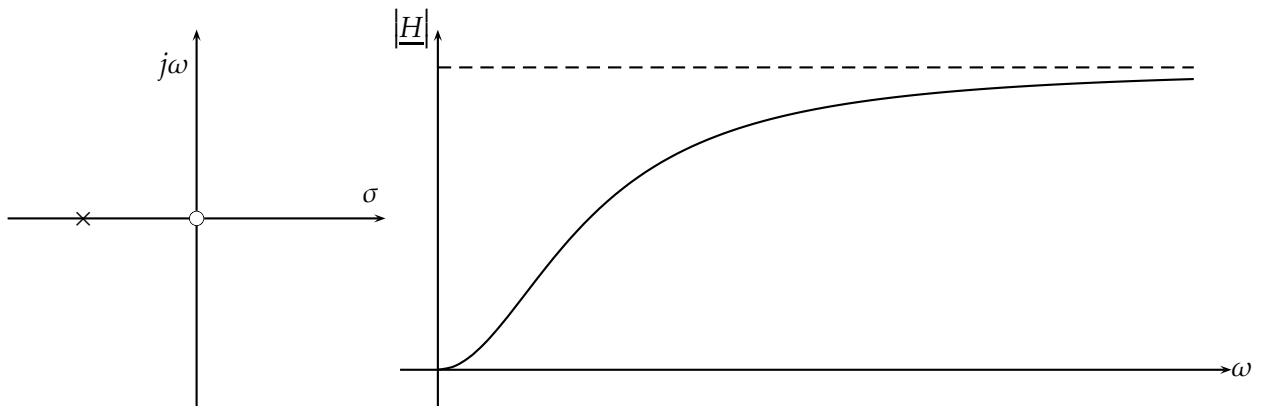
(4) Nicht stabil!!



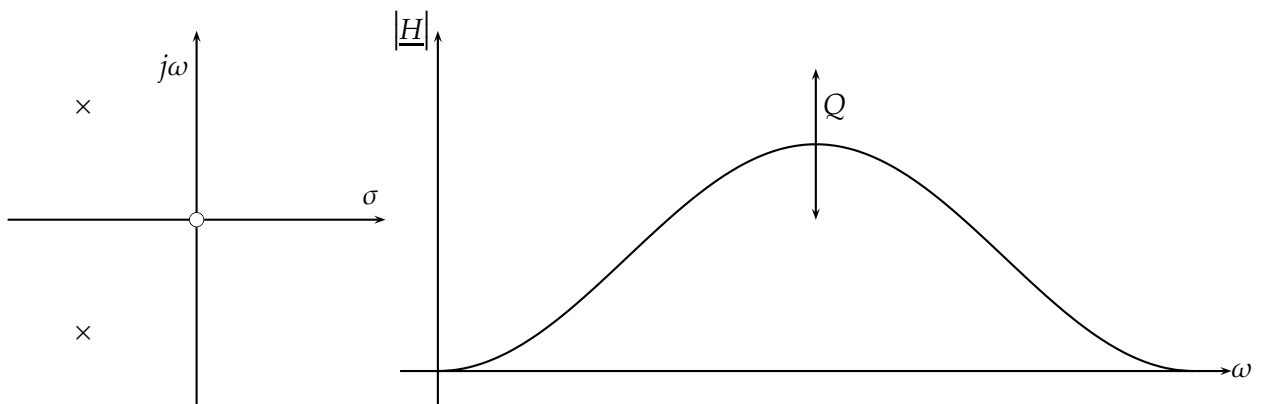
(5) Differenzierer, $\underline{H}(j\omega) = j\omega$



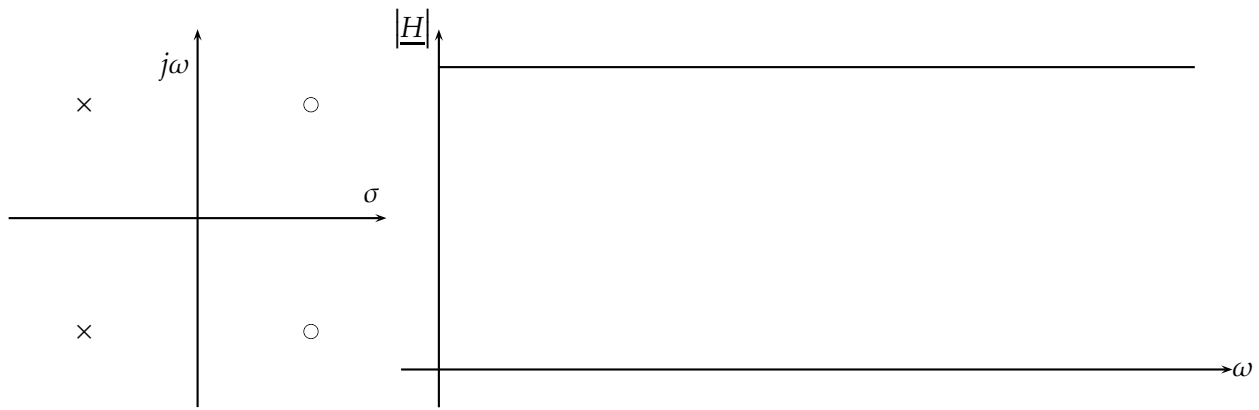
(6) Hochpass



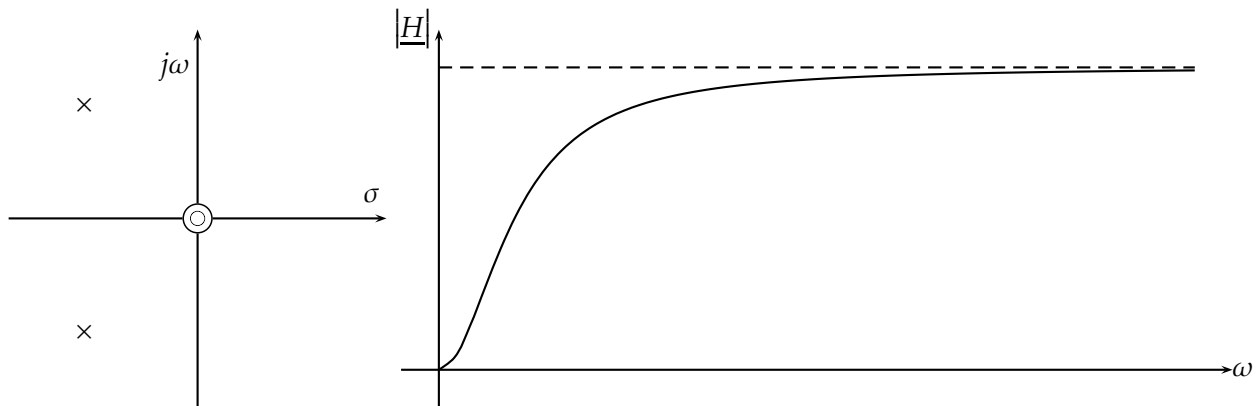
(8) Bandpass



(9) Allpass



(14) Hochpass 2. Ordnung

**Aufgabe 5.1:**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } U_A &= -A_D (K_e U_E + K U_A) + U_{\text{stör}} \\
 &= -A_D K_e U_E - A_D K U_A + U_{\text{stör}} \\
 \Leftrightarrow U_A + A_D K U_A &= -A_D K_e U_E + U_{\text{stör}} \\
 U_A &= \frac{-A_D K_e U_E + U_{\text{stör}}}{1 + A_D K} \\
 &= -\frac{A_D K_e}{1 + A_D K} U_E + \frac{1}{1 + A_D K} U_{\text{stör}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Annahme: } U_E &= 0 \\
 \Rightarrow U_A &= \frac{1}{1 + A_D K} U_{\text{stör}} \\
 \text{ohne Rückkopplung: } U_A &= U_{\text{stör}} \\
 \Rightarrow \text{Die Rückkopplung reduziert die Störspannung um } \frac{1}{1 + A_D K} \\
 \text{Die Verstärkung des Eingangssignals ist } &-\frac{A_D K_e}{1 + A_D K}.
 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Verstärkung } U_E}{\text{Verstärkung } U_{\text{stör}}} = -A_D K_e, \quad |-A_D K_e| \gg 1$$

→ Das Eingangssignal wird weit mehr verstärkt als die Störspannung. Die Störspannung wird unterdrückt.

$$\text{c) } A_D = 10^5$$

$$K = 10^{-3}$$

$$K_E = 0.5$$

$$U_E = \hat{U}_0 \sin(2\pi ft)$$

$$\hat{U}_0 = 10\text{mV}$$

$$U_{\text{stör}} = 5\text{mV}$$

1. Störspannung am Ausgang der Schaltung:

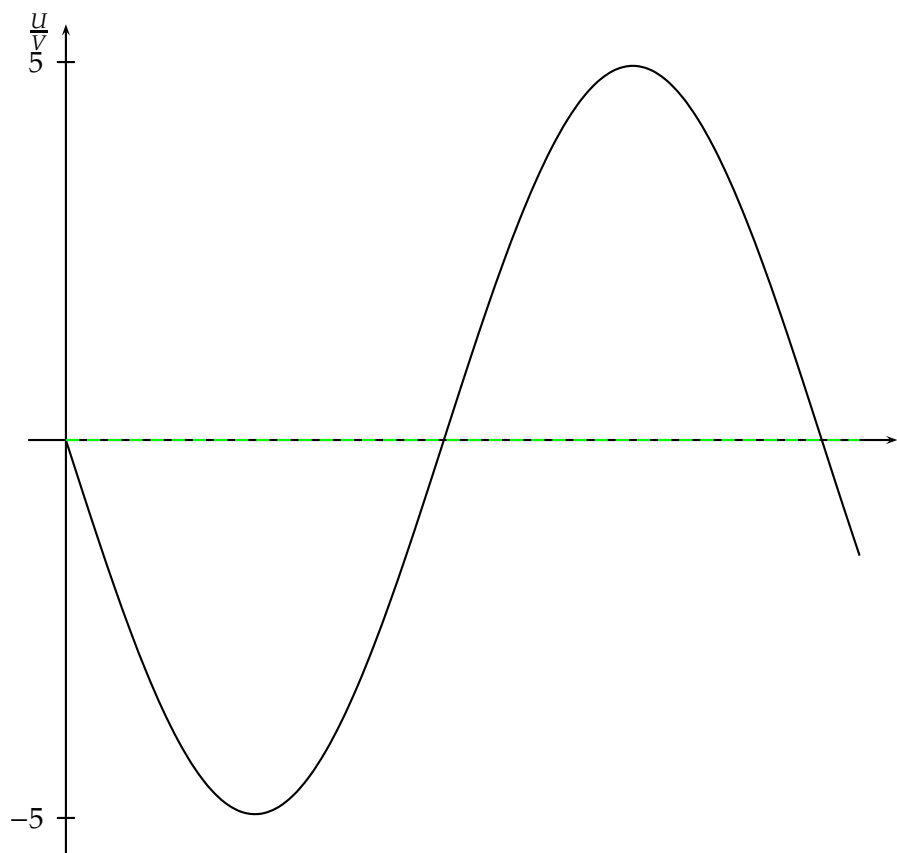
$$\begin{aligned} U_A &= -\frac{A_D K_e}{1+A_D K} U_E + \frac{1}{1+A_D K} U_{\text{stör}} \\ &= \frac{10^5 \cdot 0.5}{1+10^5 \cdot 10^{-3}} U_E + \frac{1}{1+10^5 \cdot 10^{-3}} U_{\text{stör}} \\ &\approx -495 U_E + 9.9 \cdot 10^{-3} U_{\text{stör}} \end{aligned}$$

Amplitude der Sinusspannung am Ausgang:

$$\hat{U}_{\text{sin},A} = 4.95\text{V}$$

Störspannung am Ausgang:

$$U_{\text{stör},A} = 49.5\mu\text{V}$$



U_E und $U_{\text{stör}}$ haben die gleiche Größenordnung, aber am Ausgang der Schaltung ist die Störspannung fast vollständig unterdrückt.

2. Störspannung am Eingang des Verstärkers:

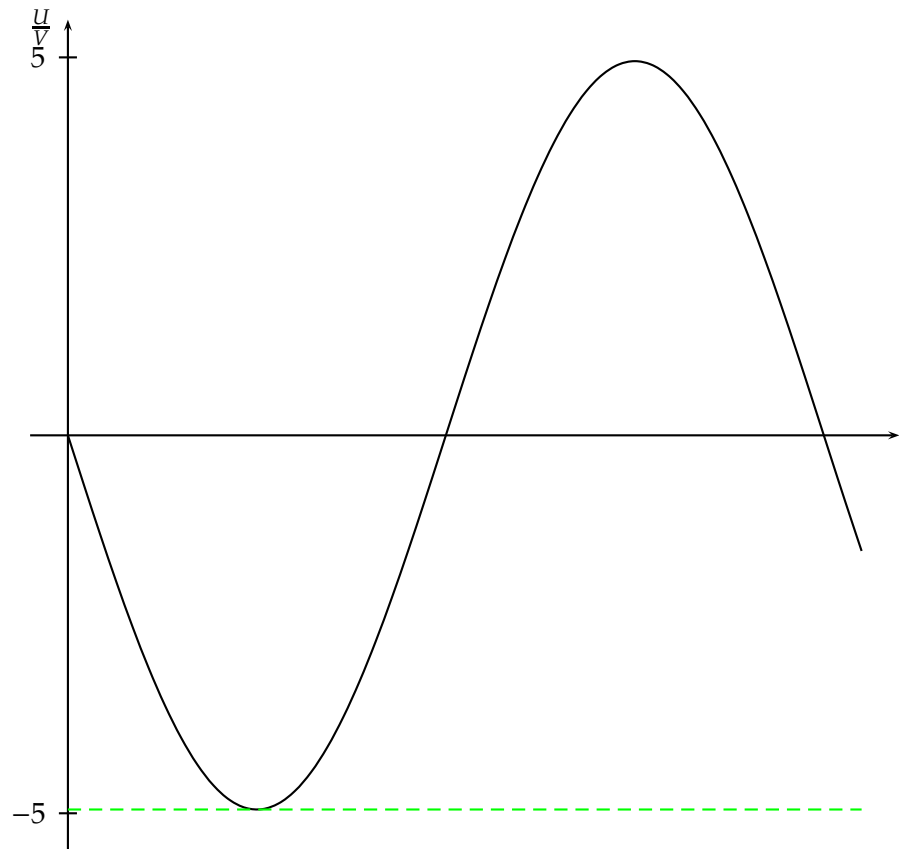
$$\begin{aligned} U_A &= -\frac{A_D K_e}{1+A_D K} U_E - \frac{A_D}{1+A_D K} U_{\text{stör}} \\ &= \frac{10^5 \cdot 0.5}{1+10^5 \cdot 10^{-3}} U_E - \frac{10^5}{1+10^5 \cdot 10^{-3}} U_{\text{stör}} \\ &\approx 495 U_E - 990 U_{\text{stör}} \end{aligned}$$

Amplitude der Sinusspannung am Ausgang:

$$\hat{U}_{\sin,A} = 4.95V$$

Störspannung am Ausgang:

$$U_{\text{stör},A} = -4.95V$$



Die Störkomponente wird höher verstärkt als das Nutzsignal. An dieser Stelle wird die Wichtigkeit einer Offsetspannungskompensation deutlich.

Aufgabe 5.2:

Aus dem Schaltbild folgen die beiden Gleichungen:

$$U_- = U_E + (U_A - U_E) \frac{R_1}{R_1 + R_N}$$

$$-A_D U_- = U_A - U_{\text{stör}} \Leftrightarrow U_- = \frac{U_{\text{stör}} - U_A}{A_D}$$

$$a) \Rightarrow U_E + (U_A - U_E) \frac{R_1}{R_1 + R_N} = \frac{U_{\text{stör}} - U_A}{A_D}$$

$$\Leftrightarrow U_A \left(\frac{R_1}{R_1 + R_N} + \frac{1}{A_D} \right) = U_E \left(\frac{R_1}{R_1 + R_N} - 1 \right) + U_{\text{stör}} \frac{1}{A_D}$$

$$\Leftrightarrow U_A \left(R_1 + \frac{R_1 + R_N}{A_D} \right) = U_E (R_1 - R_1 - R_N) + U_{\text{stör}} \frac{R_1 + R_N}{A_D}$$

$$\Leftrightarrow U_A = - \underbrace{\frac{R_N}{R_1 + \frac{R_1 + R_N}{A_D}}}_{V_{\text{Nutz}}} U_E + \underbrace{\frac{1}{\frac{A_D R_1}{R_1 + R_N} + 1}}_{V_{\text{stör}}} U_{\text{stör}}$$

b) Annahme: $U_{\text{stör}} = 0$

$$V = \frac{U_A}{U_E} = - \frac{R_N}{R_1 + \frac{R_1 + R_N}{A_D}}$$

c) Das Schaltbild ist aus Aufgabe 5.1 a) bekannt. Dort wurde für eine allgemeine rückgekoppelte invertierende Verstärkerschaltung festgestellt:

$$V = - \frac{A_D K_e}{1 + A_D K}$$

Das Ergebnis aus b) ist in die angegebene Form zu bringen:

$$\begin{aligned} V &= - \frac{R_N}{R_1 + \frac{R_1 + R_N}{A_D}} \\ &= - \frac{R_N A_D}{R_1 A_D + R_1 + R_N} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=K_e} \\ &= - \frac{A_D \frac{R_N}{R_1 + R_N}}{1 + A_D \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_N}}_{=K}} \end{aligned}$$

d) Die Verstärkung des Operationsverstärkers ist nun endlich und nichtlinear.

Ausgangsspannung:

$$U_x = -A_D (U_- + c U_-^3)$$

$$A_D = 10^5, c = 0.2 \cdot 10^8 \frac{1}{V^2}$$

Eingangssignal:

$$U_- = \hat{U}_0 \sin(\omega t), \hat{U}_0 = 0.1 \text{ mV}$$

$$\Rightarrow U_x = -A_D \hat{U}_0 \sin(\omega t) - A_D c \hat{U}_0^3 \sin^3(\omega t)$$

$$\text{mit } \sin^3(\omega t) = \frac{1}{4} (3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t))$$

$$\Rightarrow U_x = -A_D \hat{U}_0 \sin(\omega t) - \frac{1}{4} A_D c \hat{U}_0^3 (3 \sin(\omega t) - \sin(3\omega t))$$

$$= -A_D \left(\hat{U}_0 + \frac{3}{4} c \hat{U}_0^3 \right) \underbrace{\sin(\omega t)}_{\text{Grundschwingung}} + \frac{1}{4} A_D c \hat{U}_0^3 \underbrace{\sin(3\omega t)}_{\text{Oberschwingung}}$$

e) Klirrfaktor $K = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert der Gesamtschwingung}}$

Für sinusförmige Signale gilt:

$$K = \frac{\sqrt{\hat{U}_2^2 + \hat{U}_3^2 + \hat{U}_4^2 + \dots}}{\sqrt{\hat{U}_1^2 + \hat{U}_2^2 + \hat{U}_3^2 + \hat{U}_4^2 + \dots}}$$

hier:

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}c\dot{U}_0^3\right)^2 \cdot A_D}}{\sqrt{\left(\dot{U}_0 + \frac{3}{4}c\dot{U}_0^3\right)^2 + \left(\frac{1}{4}c\dot{U}_0^3\right)^2 \cdot A_D}} \\
 &= \frac{\sqrt{\left(-5 \cdot 10^{-6}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 \cdot 10^{-4} + 1.5 \cdot 10^{-5}\right)^2 + \left(-5 \cdot 10^{-6}\right)^2}} \\
 &\approx 0.059 \hat{=} 5.9\%
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.1:

Schaltungsteil I: nicht-invertierender Summierer (Skript Kapitel 6.2). Anwendung der Knotenregel ergibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{U_{+1}}{R_{14}} + \frac{U_{+1}-U_1}{R_1} + \frac{U_{+1}-U_2}{R_2} + \frac{U_{+1}-U_3}{R_3} &= 0 \\
 \Leftrightarrow U_{+1} \left(\frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) &= \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} \\
 \Rightarrow U_{+1} &= \frac{4}{5}k\Omega \left(\frac{U_1}{6k\Omega} + \frac{U_2}{3k\Omega} + \frac{U_3}{4k\Omega} \right) \\
 &= \frac{2}{15}U_1 + \frac{4}{15}U_2 + \frac{3}{15}U_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{A1} &= U_{+1} \left(1 + \frac{R_6}{R_7} \right) = 15U_{+1} \\
 &= 2U_1 + 4U_2 + 3U_3
 \end{aligned}$$

Schaltungsteil II: invertierender Summierer. Anwendung der Knotenregel ergibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{U_4}{R_4} + \frac{U_5}{R_5} + \frac{U_{A2}}{R_8} &= 0 \\
 \Leftrightarrow U_{A2} &= -R_8 \left(\frac{U_4}{R_4} + \frac{U_5}{R_5} \right) \\
 &= -U_4 - 2U_5
 \end{aligned}$$

Schaltungsteil III: nicht-invertierender Summierer. Anwendung der Knotenregel ergibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{U_{+2}}{R_{11}} + \frac{U_{+2}-U_{A1}}{R_9} + \frac{U_{+2}-U_{A2}}{R_{10}} &= 0 \\
 U_{+2} \left(\frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_9} + \frac{1}{R_{10}} \right) &= \frac{U_{A1}}{R_9} + \frac{U_{A2}}{R_{10}} \\
 \Rightarrow U_{+2} &= \frac{1}{3}k\Omega \left(\frac{U_{A1}}{1k\Omega} + \frac{U_{A2}}{1k\Omega} \right) \\
 &= \frac{1}{3}U_{A1} + \frac{1}{3}U_{A2} \\
 \Rightarrow U_{+2} &= \frac{2}{3}U_1 + \frac{4}{3}U_2 + \frac{3}{3}U_3 - \frac{1}{3}U_4 - \frac{2}{3}U_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_A &= U_{+2} \left(1 + \frac{R_{12}}{R_{13}} \right) \\
 \Rightarrow U_A &= 3U_{+2} \\
 &= 2U_1 + 4U_2 + 3U_3 - U_4 - 2U_5
 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2:

- a) Gegeben: $A_D = 10^5$
 $p_{\infty,1} = -10 \frac{1}{s}$

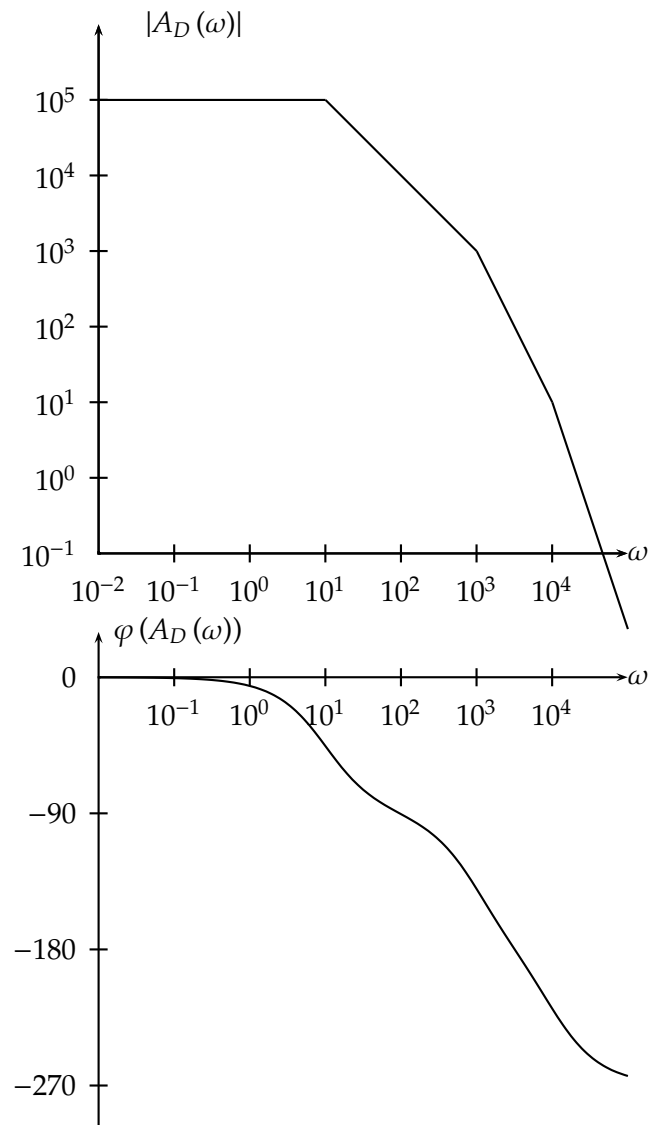
$$p_{\infty,2} = -1000 \frac{1}{s}$$

$$p_{\infty,3} = -10000 \frac{1}{s}$$

$$A_D(p) = -A_D \frac{p_{\infty,1} \cdot p_{\infty,2} \cdot p_{\infty,3}}{(p-p_{\infty,1}) \cdot (p-p_{\infty,2}) \cdot (p-p_{\infty,3})}$$

siehe 5.61 und 5.74

Näherung im Bode-Diagramm:



b) Gesucht ist die Phasenreserve $\varphi_R = |\varphi(A_D(\omega_0)) - 180^\circ|$; dazu wird eine Schleifenverstärkung benötigt.

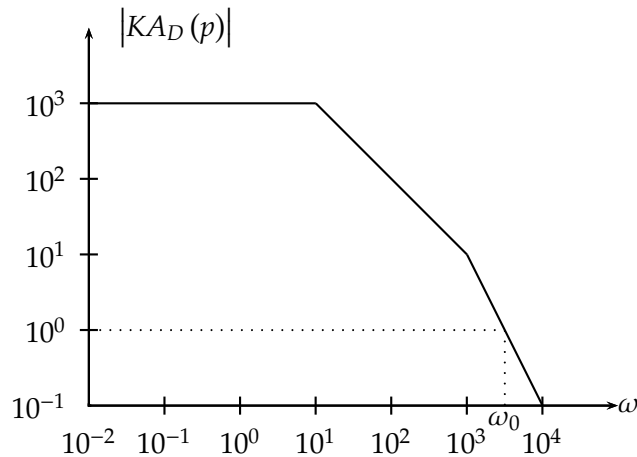
$$U_A = -A_d(p) \cdot U'_D$$

$$U_D = \frac{R_1}{R_1 + R_N} U_A = -\frac{R_1}{R_1 + R_N} A_D(p) U'_D$$

Schleifenverstärkung laut 5.69 & 5.68:

$$-g = \frac{u_D}{u'_D} = - \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_N}}_K A_D(p)$$

1. Fall: $R_1 = 1k\Omega$, $R_N = 99k\Omega$
 $\Rightarrow K = \frac{1}{100}$



Aus der Skizze ergibt sich eine Phasenreserve von ca. 0° . Das System ist also nicht stabil (allenfalls grenzstabil).

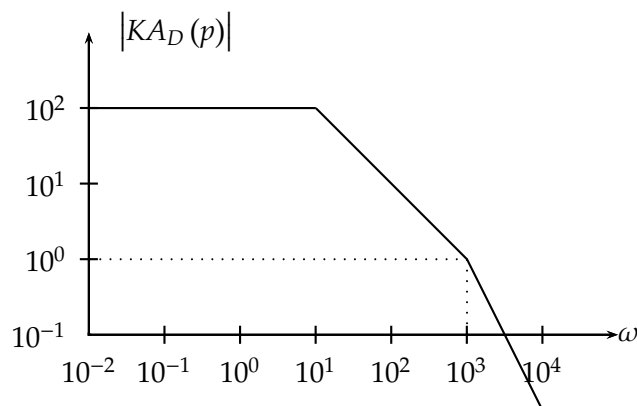
rechnerische Lösung:

$$|KA_D(\omega_0)| = 1$$

$$\text{für } \omega_0 = 3.01 \cdot 10^3 \frac{1}{s}$$

$$\varphi(KA_D(\omega_0)) = 178.2^\circ \Rightarrow \varphi_R = 1.8^\circ$$

2. Fall: $R_1 = 1k\Omega$, $R_N = 999k\Omega$
 $\Rightarrow K = \frac{1}{1000}$



Aus der Skizze ist eine Phasenreserve von ca. 45° ablesbar. Das System ist also stabil.

rechnerische Lösung:

$$|K \cdot A_D(\omega_0)| = 1$$

$$\text{mit } \omega_0 = 784 \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \varphi_R = 49^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{c) } U_1 &= (U_A - U_E) \frac{R_1}{R_1 + R_N} \\ U_A &= -A_D U_- \Leftrightarrow U_- = -\frac{U_A}{A_D} \\ U_- &= U_1 + U_E = (U_A - U_E) \frac{R_1}{R_1 + R_N} + U_E \\ \Rightarrow -\frac{U_A}{A_D} &= (U_A - U_E) \frac{R_1}{R_1 + R_N} + U_E = \frac{R_1}{R_1 + R_N} U_A + \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_N}\right) U_E \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{A_D} - \frac{R_1}{R_1 + R_N}\right) U_A &= \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_N}\right) U_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{H}(p) &= \frac{U_A}{U_E} = \frac{1 - \frac{R_1}{R_1 + R_N}}{-\frac{1}{A_D} - \frac{R_1}{R_1 + R_N}} \\ &= \frac{R_N}{-\frac{R_1 + R_N}{A_D} - R_1} \\ &= -\frac{R_N}{R_1} \frac{A_D}{\underbrace{\frac{R_1 + R_N}{R_1} + A_D}_{= -\frac{1}{K}}} \end{aligned}$$

A_D einsetzen:

$$\begin{aligned} \underline{H}(p) &= -\frac{R_1}{R_N} \frac{\frac{A_0 p_{\infty,1} p_{\infty,2} p_{\infty,3}}{(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})(p-p_{\infty,3})}}{-\frac{1}{K} + \frac{A_0 p_{\infty,1} p_{\infty,2} p_{\infty,3}}{(p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})(p-p_{\infty,3})}} \\ &= \frac{R_1}{R_N} \frac{A_0 p_{\infty,1} p_{\infty,2} p_{\infty,3}}{\frac{1}{K} (p-p_{\infty,1})(p-p_{\infty,2})(p-p_{\infty,3}) - A_0 p_{\infty,1} p_{\infty,2} p_{\infty,3}} \end{aligned}$$

Durch einsetzen der Werte erhält man die individuelle Übertragungsfunktion für beide Fälle.

Kurzaufgabe 25:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{5}{2} \sin(2\omega t) \right) \\ &= \frac{d}{dt} (5\omega \cos(2\omega t)) \\ &= -10\omega^2 \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Kurzaufgabe 26:

lineares System $s(t) = \sum_{i=1}^n a_i s_i(t)$

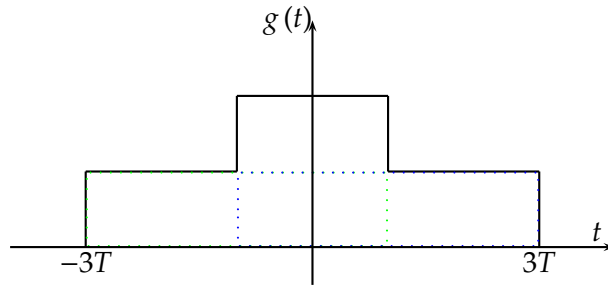
$$g(t) = f(s(t)) = \sum_{i=1}^n a_i f(s_i(t))$$

linearphasiges System $\varphi(\omega) = a\omega + b$

Kurzaufgabe 27:

$$s_1 = 2\omega_f \text{ } \square_{2\omega_f}(t)$$

$$s_2 = 2\omega_0 \text{ } \square_{2\omega_0}(t)$$

Kurzaufgabe 28:**Kurzaufgabe 29:**

Durchgelassen wird

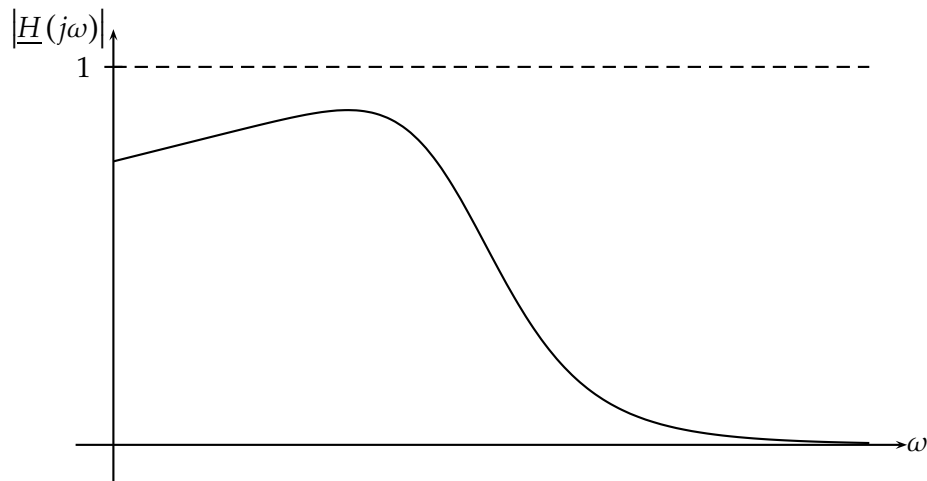
- Gleichanteil
- $\cos(\omega_0)$
- $\cos(3\omega_0)$

Kurzaufgabe 30:

$$s(t) = 5T \text{ } \square_T(t) \rightsquigarrow 5T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$g(t) = 5T \text{ } \square_T(t - \tau_0)$$

$$G(j\omega) = 5T \cdot \text{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\omega\tau_0}$$

Kurzaufgabe 31:**Kurzaufgabe 32:**

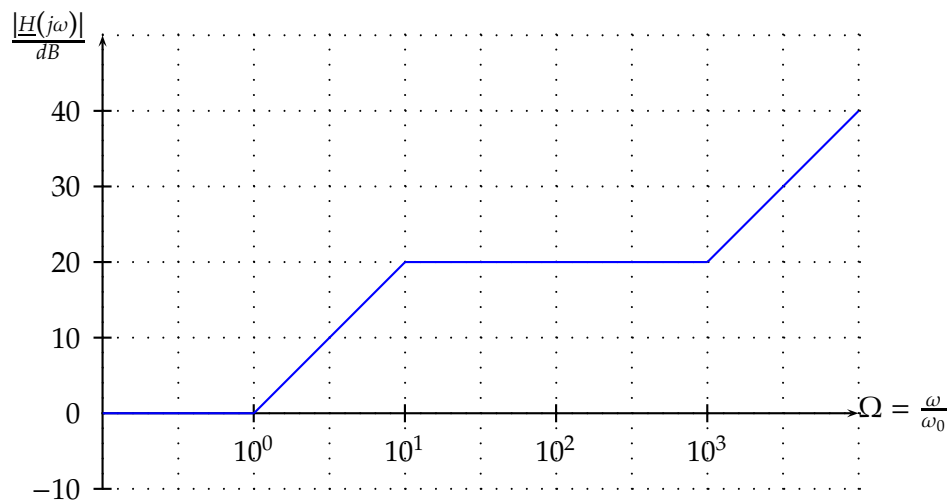
Da es sich um Rückwirkungsfreie Teilsysteme handelt gilt für lineare zeitinvariante Systeme:

$$\underline{H}(j\omega) = \prod_{i=1}^n \underline{H}_i(j\omega)$$

Kurzaufgabe 33:

Die gegebene Übertragungsfunktion setzt sich zusammen aus:

- inverser Tiefpass mit $\Omega = 1$ und einer Steigung von $20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$
- Tiefpass mit $\Omega = 10$ und einer Steigung von $-20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$
- inverser Tiefpass mit $\Omega = 1000$ und einer Steigung von $20 \frac{dB}{\text{Dekade}}$



Kurzaufgabe 34:

Bei der gegebenen Schaltung handelt es sich um einen RC-Hochpass Filter.

