

1.1 b) ohne Zurücklegen, Verhältnis wie in 1.1 a). (9)

Nach n Zügen mit Zurücklegen gesucht
 W (alle n Kugeln sind verschieden) = ?

[[Dann $n \leq N$, sonst ist das Ereignis leer.]]

Ansetz: $\Omega = P_n W(m, N)$ Gleichverteilungsgann.

$$G = P_n(m, N)$$

$$\Rightarrow W(G) = \frac{P(n, N)}{P_W(n, N)} = \frac{N(N-1) \dots (N-n+1)}{N \cdot N \dots N}$$
$$= \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right)$$

1.1 b1) „Geburtstagszillinge“

Ges: W'kelt, dass von n Personen mindestens 2
am selben Tag Geburtstag haben $\hat{=} W(G)$

[Schalttag ausgeschlossen!; Gleichverteilungsgann.]

$$\Omega = P_n W(m, N), N=365, \quad G = P_n(m, N)$$

$$\Rightarrow W(G) = 1 - \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{365}\right) \hat{=} W(G(n))$$

b2) Asymptotische Berechnung von $W(G(n))$.

$$\text{Sei } f: x \mapsto -\log(1-x)$$

$$W(G(n)) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{N}\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \log\left(1 - \frac{i}{N}\right)\right) \hat{=}$$

$$\hat{=} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} p(i, N)\right).$$

Nach dem Mittelwertsatz (Taylorformel $k=1$) (10)

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} R_1(x) ; \text{ für das Restglied}$$

erhält man die Abschätzung $0 \leq R_1(x) < \frac{1}{1-c}$
falls $0 < x < c < 1$. [Man erhält dies z.B. aus
der Reihenentwicklung $\sum_1^{\infty} \frac{x^k}{k} = f(x)$].

$$\text{Für } x = \frac{j}{N}, \quad 0 \leq j \leq n < N, \quad c = \frac{n-1}{N} < 1$$

$$\text{folgt: } \frac{j}{N} \leq p(j, N) \leq \frac{j}{N} + \frac{1}{2} \left(\frac{j}{N} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{n-1}{N}} \quad (1)$$

$$\text{Man kennt: } \sum_1^M j = M(M+1), \quad \sum_1^M j^2 = \frac{M(M+1)(M+1)}{6}$$

Setzt man dies ein, so folgt:

$$-\frac{1}{N} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \geq \sum_{j=1}^{n-1} p(j, N) \geq -\frac{1}{N} \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{d}{N^2} \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\left(\text{mit } d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n-1}{N}} \right).$$

Für das Geburtstagsparadoxienproblem erhält man:

$$1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}} \leq W(G(n)) \leq 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{2 \cdot 365}} \cdot e^{-b(n)},$$

$$b(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 6 \cdot 365} \cdot \frac{365}{365 - n + 1}$$

$$\text{z.B. } \boxed{n \geq 23} \quad \underline{\underline{\frac{1}{2} < W(G(n)) < 1 - \frac{1}{2} \cdot 0,985}}$$

$$\boxed{n \geq 50} \quad \underline{\underline{0,969 < W(G(n)) < 1 - 0,969 \cdot 0,84}}$$

Bessere Abschätzungen erhält man, wenn man ⁽¹¹⁾
z.B. die Taylorsche bis zum zweiten Glied
entwickelt.

1.1 c) Sei $N \leq n$. Wie groß ist die
W'keit, daß eine zufällige Permutation
 $f \in \text{Per} W(n, N)$ surjektiv ist. [Gleichverteilung!]

$$[A = \{ \text{surjektive } P_i \} = \bigcup_{j=1}^N A_j, \quad [\text{! nicht disj.}]$$

$$A_j := \{ f \in \text{Per} W(n, N) : j \notin \text{im}(f) \}$$

Halbsmittel: Siebformel oder Ein-Aus-
schließungsprinzip.

1.2 Prop. (Siebformel). $\Omega \neq \emptyset$, Σ sei eine
 σ -Algebra, $\lambda: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine additive
Abbildung, d.h. $\forall N \quad \lambda(\bigcup_{i=1}^N A_i) = \sum_{i=1}^N \lambda(A_i)$,
 $A_i \in \Sigma$.

Dann gilt: $\forall N, \forall B_i \in \Sigma$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda(B_{i_1}) - \sum_{i_1 < i_2} \lambda(B_{i_1} \cap B_{i_2}) + \dots \\ + (-1)^{N-1} \lambda\left(\bigcap_{i=1}^N B_{i_i}\right)$$

[Beispiele: (1) $\lambda = W$ W'keit, (2) $\lambda = \text{card}$]

Beweisidee: $N=1$ nichts zu zeigen

$$\underline{N=2} \quad B_1 \cup B_2 = (B_1 \setminus (B_1 \cap B_2)) \dot{\cup} (B_1 \cap B_2) \dot{\cup} (B_2 \setminus (B_1 \cap B_2))$$

$$\Rightarrow \lambda(B_1 \cup B_2) = (\lambda(B_1) - \lambda(B_1 \cap B_2)) + \lambda(B_1 \cap B_2) + (\lambda(B_2) - \lambda(B_1 \cap B_2))$$

Induktionsschritt $N \rightsquigarrow N+1$.

$$\bigcup_{i=1}^{N+1} B_i = \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^N B_i \right)}_{A_1} \cup \underbrace{B_{N+1}}_{A_2}$$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{N+1} B_i\right) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2) =$$

$N=2$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) + \lambda(B_{N+1}) - \lambda\left(\bigcup_{i=1}^N (B_i \cap B_{N+1})\right).$$

Man wendet die Induktionsschlussvoraussetzung an und erhält durch Zusammenfassen der Terme die behauptete Darstellung □

Fortsetzung von 1.1c) $G = \bigcup_{j=1}^N G_j$,

$$\text{Sei } G_{j_1, \dots, j_k} = \bigcap_{i=1}^k G_{j_i} = \{f : \hat{g}_i \notin \text{im}(f), i=1, \dots, k\}.$$

$$= \{f : \{1, \dots, m\} \longrightarrow \{1, \dots, N\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}\}$$

$$\Rightarrow \text{card}(G_j) = \text{PW}(m, N-1), \quad \text{card}(G_{j_1, \dots, j_k}) = \text{PW}(m, N-k)$$

[$\forall$ unabhängig von dem speziellen Tupel $\{j_1, \dots, j_k\}$]

$$\Rightarrow W(A) = 1 - W(\bar{A}) \quad (\text{Siebformel})$$

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k \sum_{j_1 < \dots < j_k} \text{card}(A_{j_1, \dots, j_k}) / \text{PW}(m, N) =$$

$$\frac{1}{N^m} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} (N-k)^m = \left[\binom{N}{k} = \text{Anzahl der } k\text{-Tupel } \{j_1, \dots, j_k\} \right]$$

$$= \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^m$$

1.3 Bsp: Fixpunktfreie Permutationen

Ges.: W'keit, dass eine Permutation auf $P_n(N, N)$ keinen Fixpunkt besitzt $\Rightarrow W(A)$
 [! Gleichverteilung!] $\Omega = P_n(N, N)$

$$A = \bigcup_1^N A_{j_i}, \quad A_{j_i} = \{f \in P_n(N, N) : f(i) = j_i\}$$

$$A_{j_1, \dots, j_k} = \bigcap_1^k A_{j_{i_c}} = \{f : f(i_c) = j_{i_c}, \quad c=1, \dots, k\} =$$

$$\{f : j_{i_c} \mapsto j_{i_c}, \quad c=1, \dots, k$$

$$\{1, \dots, N\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\} \longrightarrow \{1, \dots, N\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$$

bijektiv.

$$\text{card}(A_{j_1, \dots, j_k}) = P(N-k, N-k) = (N-k)!$$

[unabhängig von $\{j_1, \dots, j_k\}$].

Siebformel anwenden

$$\Rightarrow W(A) = 1 - W(\bar{A}) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(N-k)!}{N!} \quad (14)$$

$$(\text{kurzer}) = \sum_0^N (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$$

Bem. 1 $\binom{N}{k}$ = Anzahl der k -Tupel $\{i_1, \dots, i_k\}$

Bem. 2 Konvergenz gegen $\frac{1}{e}$: $\sum_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$,

|| $x = -1$ einsetzen.

1.4 Bsp. Ziehen aus einer Urne: n Züge,
 N Kugeln, davon $1, \dots, w$ (schwarz), $w+1, \dots, N$ (schwarz),
 $S = N - w$.

Gesucht: W (mal n Züge k schwarze), $k \leq n$.

Daher a) mit Zurücklegen, Gleichst. auf a) $P_{ZW}(n, N)$
 b) ohne Zurücklegen, Gleichst. auf b) $P_{ZL}(n, N)$

$$G(k) = \bigcup_{\{i_1, \dots, i_k\}} G_{i_1, \dots, i_k}, \quad \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\},$$

$$G_{i_1, \dots, i_k} = \left\{ f: \begin{array}{l} f(i_j) \in \{w+1, \dots, N\}, \quad j=1, \dots, k \\ f(i) \in \{1, \dots, w\}, \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\} \end{array} \right\}$$

$$\text{Card}(G_{i_1, \dots, i_k}) = PW(m-k, w) \cdot PW(k, \Delta)$$

[a] (weiße K_1) (schwarze K_1)

[nicht abhängig von $\{i_1, \dots, i_k\}$]

$$\Rightarrow \text{card}(G(k)) = K(k, n) P_W(n-k, w) P_W(k, s) \quad (15)$$

$$(K(k, n) = \text{card} \{i_1, \dots, i_k\} = \binom{n}{k})$$

$$\Rightarrow W(G(k)) = \binom{n}{k} \left(\frac{w}{N}\right)^{n-k} \left(\frac{s}{N}\right)^k = \binom{n}{k} \xi^{n-k} \rho^k$$

[Spätk. Binomialverteilung].

b) Ohne Zurücklegen $\Omega = P_n(n, N)$, $n \leq N$

$$\text{card } G_{i_1, \dots, i_k} = P(n-k, w) P(k, s), \quad k \leq s, \quad n-k \leq w.$$

$$\Rightarrow W(G(k)) = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{(n-k-w)!} \cdot \frac{s!}{(s-k)!} \bigg/ \frac{N!}{(N-n)!}$$

$$\stackrel{(\text{kurzer})}{=} \frac{\binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

[Spätk. hypergeometrische Verteilung].

1.5 Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen.

N Kugeln, davon s schwarz, w weiß, n Züge.

Gesucht: $W(G(k)) = W(\text{kein } k\text{-ter Zug} \quad \underline{\underline{\text{erstmal weiß}}})$

$$\Omega = P_n W(n, N)$$

$$G(k) = \left\{ f \in \Omega : \begin{array}{l} f(i) \in \{w+1, \dots, N\}, \quad i \leq k-1 \\ f(k) \in \{1, \dots, w\} \\ \{k+1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, N\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow G(k) = \bigcup_{j=1}^w G_j, \quad G_j = \{f \in G(k) : f(k) = j\} \quad (16)$$

$$\text{Card } G_j = PW(k-1, s) \cdot PW(m-k, N)$$

$$\Rightarrow W(G(k)) = w \cdot \frac{s^{k-1} \cdot N^{m-k}}{N^m} \doteq p \cdot \varrho^{k-1}$$

$$\text{mit } p = \frac{w}{N}, \quad \varrho = \frac{s}{N}$$

[VSpöts: geometrische Verteilung!]

Dabei war $k=1, \dots, m$.

$G(m+1) := \{\text{unk } m \text{ Züge keine weiße K.}\}$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m+1} G(k) \Rightarrow W(G(m+1)) = 1 - \sum_{k=1}^m p \varrho^{k-1}$$

1.6 Wahl Zählen (Ballot Problem)

(17)

(! Kombinatorik: Spieltheorieprinzip!)

2 Kandidaten I, II stellen sich einer Wahl. Die Stimmen werden
nacheinander abgegeben: n Stimmen, davon a für I, b für II.

Es ist $a > b$ ($c := a - b > 0$).

Frage: Wie groß ist die W'keit, daß während des ganzen
Wahlkampfes immer II führt?

Modell: $\Omega = \{\omega: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{+1, -1\}\}$

(mit ± 1 : Stimme für $\pm$), $\sum_{i=1}^n \omega(i) = c$ (= Stimme für I
minus Stimme für II) $\}$.

Aber Laplace: $\Omega = \{\omega: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}: \sum_{i=1}^n \omega(i) = c$
 $\omega(0) := 0\}$.

Jedem $\omega \in \Omega$ ordnet man eine "Pfad" $S \in \mathbb{Z}$, $S: \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $S(0) := 0$, $S(k) := \sum_{i=0}^k \omega(i)$. Die Zuordnung ist bijektiv,
denn $\omega(i+1) = S(i+1) - S(i)$, $i \geq 0$, $\omega(0) = S(0) = 0$.

Somit könnte man anstelle von Ω auch den Pfadraum
 $\Omega' = \{S: S(0) = 0, S(n) = c, S(i+1) - S(i) \in \{\pm 1\}\}$
zählen.

Neue Beschreibung: $S_+ := \{i: \omega(i) = +1\}$

$\{i: S(i) - S(i-1) = +1, i \geq 1\}$.

Offensichtlich ist die Zuordnung $S \leftrightarrow S_+$ bijektiv.

Somit könnte man

$\Omega'' = \{\{i_1, \dots, i_a\} \subseteq \{1, \dots, n\}\}$ zählen.

$|S_+| = \text{card } S_+ = a$, $S(-) = n - a = b$ (unabhängig von S)

Wegl- $a-b=c$ (wpr. $S(+)-S(-)=c$) $\bar{u}w$ (18)

folgt $a=S(+)=\frac{n+c}{2}$

Damit $\text{Card}(\Omega) = K(\underbrace{S(+)}_a, m) = \binom{n}{\frac{n+c}{2}} = \binom{n}{a}$

Analog: Sei $(i_0, k_0), (A, B) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.

Sei S ein Pfad, der von (i_0, k_0) nach (A, B) führt, so ist $S' : S'(i) := S(i_0 - i) - k_0$ ein Pfad, der von $(0, 0)$ nach $(A - i_0, B - k_0) \doteq (m, d)$ führt, u.u. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \text{Card} \{ \text{Pfade } S : (i_0, k_0) \rightsquigarrow (A, B) \} &= \text{Card} \{ \text{Pfade } (0, 0) \rightsquigarrow (m, d) \} \\ &= K\left(\frac{m+d}{2}, m\right) = \binom{m}{\frac{m+d}{2}} \end{aligned}$$

Nun sei $G := \{ \text{Pfade } S : S(i) \geq 0 \text{ für alle } i \}$,

$$[G = \{ S : \exists i(s) \in \{1, \dots, n-1\} : S(i(s)) = -1, S(i) \geq 0 \text{ für } 0 \leq i < i(s) \}$$

Spiegelungsprinzip: $S \in [G$ (d.h. S schneidet die Linie -1) wird ein Pfad $\tilde{S}$ zugeordnet:

$$\tilde{S}(i) = S(i), \quad i \leq i(s), \quad \tilde{S} \text{ wird ab } i(s) \text{ an der}$$

$$\text{Linie } -1 \text{ gespiegelt: } \tilde{S}(i) = -1 - (S(i) + 1) = -S(i) - 2, \quad i(s) < i.$$

Da offenbar $(\tilde{S}) = S$ folgt:

$$\begin{aligned} \text{card } [G] &= \text{card } \{ \tilde{S} : S \in [G] \} = \\ \text{card } \{ \tilde{S} : (0,0) \rightsquigarrow (n, -c-2) \} &\stackrel{(S,0)}{=} \binom{n}{\frac{n-c-2}{2}} \\ &= \binom{n}{\frac{n+c+2}{2}} \end{aligned}$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass $0 < c \leq n-2$.
 Ist $c \geq n-1$, so ist $[G] = \emptyset$

Somit erhält man

$$W(G) = 1 - \binom{n}{\frac{n+c+2}{2}} / \binom{n}{\frac{n+c}{2}} \quad (0 < c \leq n-2)$$

§ 2 Spinnelle der krete Verteilungen

(20)

Zunächst $\Omega \neq \emptyset$, $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$.

2.1 Def. Sei $\omega_0 \in \Omega$. $\mathcal{E}_{\omega_0}$ heißt "Elementarw'heit",
"Punktw'maß", "Einheitsmaß".

$$\mathcal{E}_{\omega_0}(A) := 1_A(\omega_0) \stackrel{r}{=} \begin{cases} 1 & \omega_0 \in A \\ 0 & \omega_0 \notin A \end{cases}.$$

2.2 Def. Seien $\omega_i \in \Omega$, $1 \leq i \leq N (\leq \infty)$, seien

$$p_i \geq 0 \text{ mit } \sum_1^N p_i = 1.$$

$$W := \sum_1^N p_i \mathcal{E}_{\omega_i} : A \mapsto W(A) := \sum_{i: \omega_i \in A} p_i \\ = \sum_{i=1}^N p_i \mathcal{E}_{\omega_i}(A)$$

heißt Konvexkombination von Punktw'maßen, oder
diskrete W'maß (diskrete Verteilung).

In den Beispielen: $\Omega \subseteq \mathbb{Z}$.

[Man nennt dann die Funktion $\mathbb{Z}_+ \ni k \mapsto p_k$ Zähl-dichte.
Der Begriff W'maß - das z. Verteilung mit z. tendet.

Unmittelbar nach z. p. 1: W ist eine W'heit!

Man beachte $\mathcal{E}_{\omega}(\bigcup_1^{\infty} A_k) = 1_{\bigcup_1^{\infty} A_k}(\omega) = \sum_k 1_{A_k}(\omega) = \sum \mathcal{E}_{\omega}(A_k)$

2.3 Bsp. Binomial- (Bernoulli-) Verteilung.

$$\text{Sei } 0 < p < 1, q := 1 - p.$$

$$B(n, p) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathcal{E}_k$$

(21)

$\left[1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \right]$, Daher liegt eine
Konvexkombination vor $\left. \right]$

Für $p \rightarrow 0$: $\beta(n, p) = \binom{n}{0} p^0 q^n \varepsilon_0 + \sum_{k \geq 1} p^k q^{n-k} \varepsilon_k$
 $(q \rightarrow 1)$
 $\rightarrow \varepsilon_0 =: \beta(n, 0)$

Für $p \rightarrow 1$: $\beta(n, p) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \varepsilon_k + p^n q^0 \varepsilon_n \rightarrow$
 $(q \rightarrow 0)$
 $\varepsilon_n =: \beta(n, 1)$

Spezialfall : $\beta(1, p) = q \varepsilon_0 + p \varepsilon_1$

Vgl. §1: Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen,
 p = Mischungsverhältnis

2.4 Hypergeometrische Verteilung : (Vgl. §1: Ziehen
ohne Zurücklegen),

$$H(N, s, m; k) := \binom{s}{k} \binom{N-s}{m-k} / \binom{N}{m}$$

(wobei $0 \leq k \leq s$, $s \leq N$, $k \leq m$, $m-k \leq N-s$.)

Hypergeometrische Verteilung $W = \sum_{k=0}^m H(N, s, m; k) \varepsilon_k$

2.5 Geometrische Verteilung : $0 < p < 1$, $q := 1-p$

$\text{Geo}(p) := \sum_{k=0}^{\infty} p q^k \varepsilon_k$ [Vgl. §1: "Erstmal eine
 rechte Kugel ziehen"]

Manchmal auch in verschobenem Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} p q^k \varepsilon_{k+1}$

[Die geometrische Vt. sind W'keiten, Aus Mathematik I (22)
(oder HM) ist bekannt: $\sum_0^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$ (geometrische Reihe)
 $\Rightarrow (x=q) : \sum_0^\infty p q^k = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$]

2.6 Poissonverteilung $\lambda > 0$,

$$\pi_\lambda := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \varepsilon_k \quad (\stackrel{=}{=} \text{Pois}(\lambda)),$$

[π_λ ist eine W'keit: Bekannt ist die Exponentialreihe
 $\sum_0^\infty \frac{x^k}{k!} = e^x$, $x \in \mathbb{C}$. Weiter ist bekannt: $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$,

Daher (mit $x = \lambda$): $e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$]

Erste Grenzwertsätze der W-Rechnung.

[! Die Koeffizienten $H(N, s_N, n; k)$ sind unhandlicher als die $\beta(n, p)(k)$, und für feste n, k sind die Koeffizienten $\beta(n, p)(k)$ schwer zu berechnen.]

2.7 Satz (Binomial Vt. $\sim$ Hypergeometrische Vt.)

Sei $N \in \mathbb{N}$, $s_N < N$ ($w_N := N - s_N$), $p_N := \frac{s_N}{N}$, $q_N = \frac{w_N}{N}$

Hält man n, k fest und betrachtet den Fall $N \rightarrow \infty$,

mit $\boxed{p_N = \frac{s_N}{N} \rightarrow p \in (0, 1)}$

$\forall k \Rightarrow H(N, s_N, n; k) - \beta(n, p)(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$

Faustregel: Wenn $N \gg n$ ist, so muss man mit zwischen "Ziehen mit Zurücklegen" und "Ziehen ohne Zurücklegen" unterscheiden.

Beweisskizze: $H(N, s_N, m; k) = \frac{s_N! (N-s_N)!}{k! (s_N-k)! (n-k)! (N-s_N-n+k)!} \cdot \frac{m! (N-n)!}{N!}$

$$= \binom{m}{k} \frac{s_N (s_N-1) \dots (s_N-k+1) \cdot (N-s_N) \dots (N-s_N-n+k+1)}{N (N-1) \dots (N-k) (N-k-1) \dots (N-m+1)} =$$

$$\binom{m}{k} \left(\frac{s_N}{N}\right)^k \left(\frac{N-s_N}{N}\right)^{m-k} \cdot \underbrace{\text{Rest}(N)}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1} = \beta(n, p_N)(k) \cdot \text{Rest}(N)$$

2.8 Satz (Binomial $\sim$ Poisson),

Seien $p_N \in (0, 1)$, $\boxed{N \cdot p_N \longrightarrow \lambda > 0}$

(d.h. $p_N = \frac{\lambda}{N} + \frac{r_N}{N}$, $r_N \rightarrow 0$)

$\Rightarrow \beta(N, p_N)(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \pi_\lambda(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

linke Seite $\binom{N}{k} \left(\frac{\lambda + r_N}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda + r_N}{N}\right)^{N-k} =$

$$\frac{N!}{k! (N-k)!} \cdot \frac{(\lambda + r_N)^k}{N^k} \left(1 - \frac{\lambda + r_N}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda + r_N}{N}\right)^{-k} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{k!}}_{\rightarrow \lambda^k} \underbrace{(\lambda + r_N)^k \left(1 - \frac{\lambda + r_N}{N}\right)^N}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\text{Rest}(N)}_{\rightarrow 1}$$

Math. I: $x_n \rightarrow x \Rightarrow \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$